

4.4.20 Kvadratická funkce II

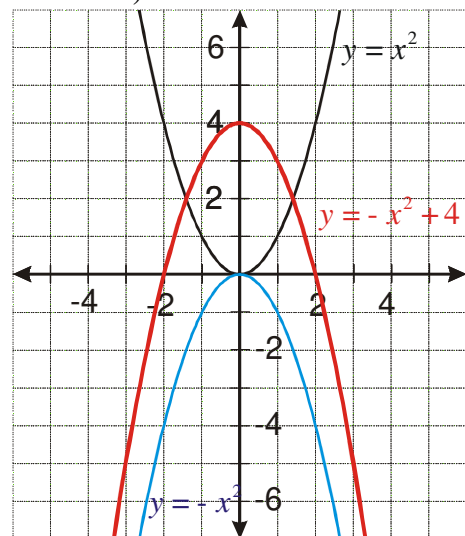
Předpoklady: 040419

Př. 1: Nakresli graf kvadratické funkce $y = -x^2 + 4$. Kdy je funkce rostoucí, kdy klesající?

Vycházíme postupně z funkce $y = x^2$.

$y = -x^2$: graf se převrátí podle osy x (z kladných hodnot y se staly záporné)

$y = -x^2 + 4$: převrácený graf se posunuje o 4 nahoru (všechny hodnoty funkce $y = -x^2$ se zvětší o 4)



Výsledek si můžeme ověřit i pomocí tabulky s hodnotami.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-5	0	3	4	3	0	-5

Př. 2: Ve kterých bodech protínají grafy následujících funkcí osu x ? Zkontroluj výsledky bodů a) a b) nakreslením grafů.

a) $y = x^2 - 1$ b) $y = x^2 + 2$ c) $y = 3x^2 - 9$

Kdy se graf funkce $y = x^2 + a$ protíná s osou x ?

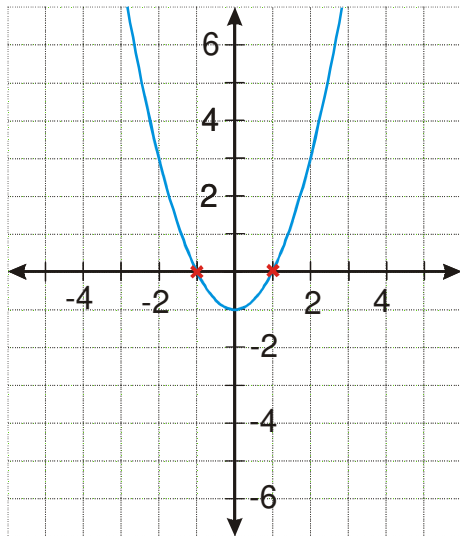
Průsečík s osou x : bod, pro který platí $y = 0$.

a) $y = x^2 - 1 \Rightarrow$ dosadíme: $0 = x^2 - 1 \Rightarrow$ řešíme kvadratickou rovnici.

$0 = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) \Rightarrow$ dvě řešení:

- $x_1 = 1 \Rightarrow$ bod $[1; 0]$,
- $x_1 = -1 \Rightarrow$ bod $[-1; 0]$.

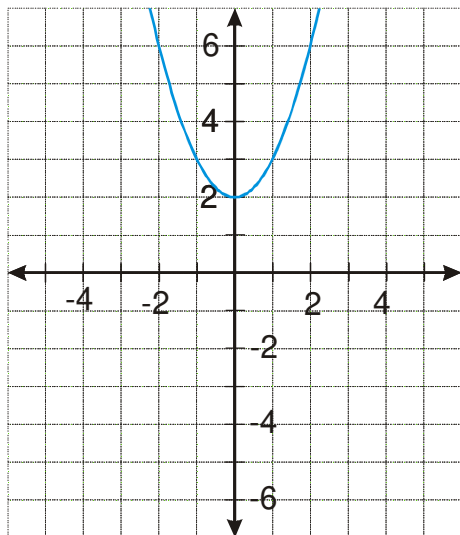
Funkce $y = x^2 - 1$ (posunutá vůči funkci $y = x^2$ o 1 dolů) se s osou x protíná v bodech $[1; 0]$ a $[-1; 0]$.



b) $y = x^2 + 2$

\Rightarrow dosadíme: $0 = x^2 + 2 \Rightarrow$ řešíme kvadratickou rovnici.

Výraz $x^2 + 2$ nejde rozložit (rovnice $x^2 + 2 = 0$ nemůže nikdy vyjít, protože x^2 je nezáporné číslo) \Rightarrow funkce $y = x^2 + 2$ se s osou x neprotíná.



c) $y = 3x^2 - 9 \Rightarrow$ dosadíme: $0 = 3x^2 - 9 \Rightarrow$ řešíme kvadratickou rovnici.

$$0 = 3x^2 - 9 = 3(x^2 - 3) = 3(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \Rightarrow \text{dvě řešení:}$$

- $x_1 = \sqrt{3} \Rightarrow$ bod $[\sqrt{3}; 0]$,
- $x_2 = -\sqrt{3} \Rightarrow$ bod $[-\sqrt{3}; 0]$.

Funkce $y = 3x^2 - 9$ se s osou x protíná v bodech $[\sqrt{3}; 0]$ a $[-\sqrt{3}; 0]$.

Graf funkce $y = x^2 + a$ se protíná s osou x , právě, když $a \leq 0$. Dvě zdůvodnění:

- pro $a \leq 0$ je vrchol paraboly buď v bodě $[0; 0]$ nebo je posunutý pod osu x (směrem dolů) \Rightarrow parabola se musí protínat s osou x ,

- pro $a \leq 0$ má rovnice $x^2 + a = 0$ tvar: $x^2 - \text{kladné číslo} = 0$ je možné ji rozložit podle vzorce $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ a má tedy řešení.

Př. 3: Nakresli graf funkce $y = x^2 - \pi$. Pro které hodnoty x platí:

a) $f(x) = 0$

b) $f(x) > 0$

c) $f(x) \leq 0$

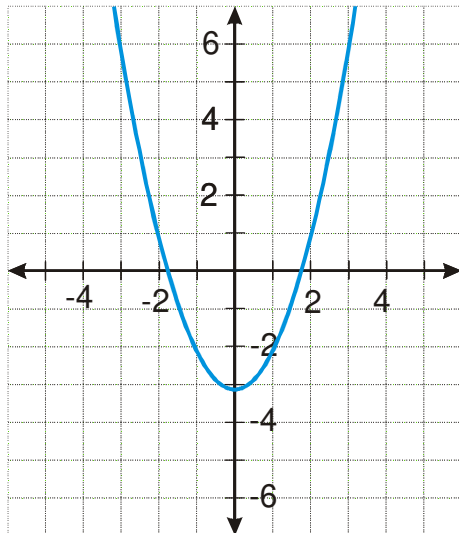
Graf funkce $y = x^2 - \pi$ je vzhledem ke grafu funkce $y = x^2$ posunutý o $\pi \doteq 3,14$ dolů.

Řešení příkladu je závislé na souřadnicích průsečíků grafu s osou $x \Rightarrow$ dosadíme: $0 = x^2 - \pi \Rightarrow$ řešíme kvadratickou rovnici.

$$0 = x^2 - \pi = (x - \sqrt{\pi})(x + \sqrt{\pi}) \Rightarrow \text{dvě řešení:}$$

- $x_1 = \sqrt{\pi} \Rightarrow$ bod $[\sqrt{\pi}; 0]$,
- $x_2 = -\sqrt{\pi} \Rightarrow$ bod $[-\sqrt{\pi}; 0]$.

Funkce $y = x^2 - \pi$ se s osou x protíná v bodech $[\sqrt{\pi}; 0]$ a $[-\sqrt{\pi}; 0]$.



Teď snadno dořešíme příklad.

a) $f(x) = 0$ pro $x = -\sqrt{\pi}$ a $x = \sqrt{\pi}$.

b) $f(x) > 0$ pro $x \in (-\infty; -\sqrt{\pi}) \cup (\sqrt{\pi}; \infty)$.

c) $f(x) \leq 0$ pro $x \in \langle -\sqrt{\pi}; \sqrt{\pi} \rangle$

Pedagogická poznámka: Následující příklad většina třídy neřeší, synchronizujeme tak, aby všichni začali s řešením příkladu 5.

Př. 4: Pro kterou kvadratickou funkci platí: $f(x) \geq 0$ pro $x \in \langle -4; 4 \rangle$?

Předchozí příklad: kvadratická funkce ve tvaru „d'olíku“ \Rightarrow hodnoty jsou větší než nula pro velmi velká a velmi malá x („na krajích číselné osy“) \Rightarrow funkce, kterou hledáme, musí mít

opačný tvar „kopečku“ (aby byla nad osou x v prostřední části grafu) \Rightarrow půjde o graf $y = -x^2 + a$ s průsečíky s osou x v bodech $[-4; 0]$ a $[0; 4]$.

Platí $-(-4)^2 = -16 \Rightarrow$ graf musí být posunutý o 16 nahoru \Rightarrow hledanou funkcí je funkce $y = -x^2 + 16$.

Př. 5: Nakresli do jednoho obrázku grafy následujících kvadratických funkcí.

a) $y = x^2$ b) $y = 2x^2$ c) $y = 0,5x^2$

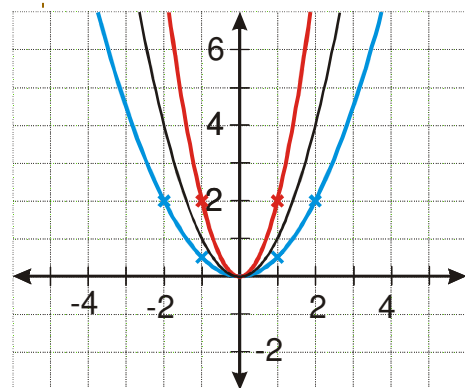
Jak ovlivňuje hodnota parametru a graf funkce $y = ax^2$?

Spočteme si hodnoty všech funkcí pro několik hodnot x .

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8
$y = 0,5x^2$	2	0,5	0	0,5	2

Kreslíme grafy:

- $y = x^2$: už známe,
- $y = 2x^2$: všechny hodnoty y jsou dvakrát větší než odpovídající hodnoty y u funkce $y = x^2 \Rightarrow$ graf se ve svislém směru protáhne dvakrát (dvakrát zvětší), vrchol v bodě $[0; 0]$ zůstane,
- $y = 0,5x^2$: všechny hodnoty y jsou poloviční než odpovídající hodnoty y u funkce $y = x^2 \Rightarrow$ graf se ve svislém směru zkrátí dvakrát (dvakrát zmenší), vrchol v bodě $[0; 0]$ zůstane,



Hodnota parametru a u funkce $y = ax^2$ ovlivňuje protažení grafu ve svislém směru (větší hodnota $a \Rightarrow$ protaženější, užší graf). Pokud je hodnota záporná graf se převrátí podle osy x .

Př. 6: Najdi čísla a, b tak, aby kvadratická funkce $y = ax^2 + b$ procházela body $[1; -1]$ a $[-2; 5]$.

V předpisu máme dvě neznámé, známe dva body \Rightarrow dosazením bodů do předpisu získáme dvě rovnice, jejich řešením pak hodnoty obou neznámých.

$[1; -1]: -1 = a \cdot 1^2 + b,$

$[-2; 5]: 5 = a \cdot (-2)^2 + b$

Soustava rovnic:

$$a + b = -1$$

$$4a + b = 5$$

Odečteme rovnice: $3a = 6 \quad / : 3$

$$a = 2$$

Dopočteme hodnotu b : $2 + b = -1 \quad / -2$

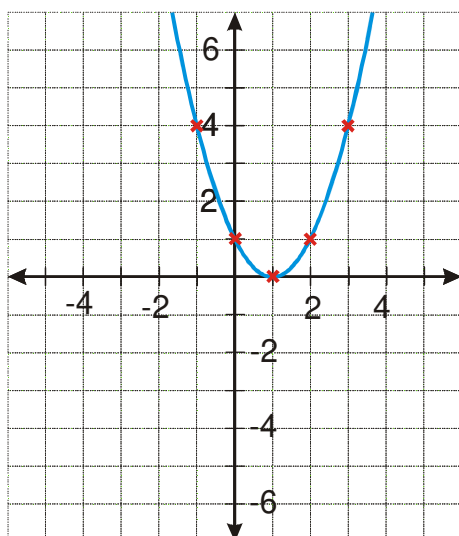
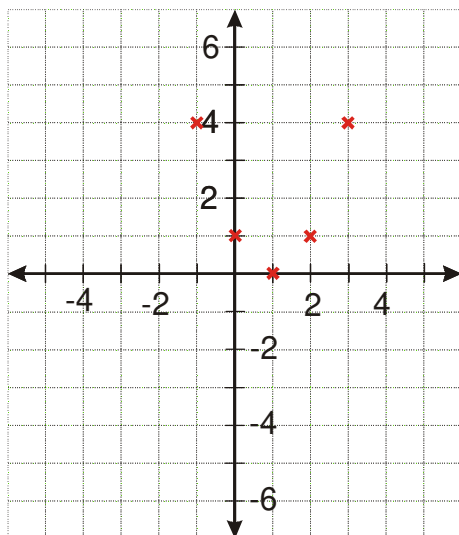
$$b = -3$$

Body $[1; -1]$ a $[-2; 5]$ prochází funkce $y = 2x^2 - 3$

Př. 7: Nakresli graf funkce $y = (x - 1)^2$. Jak můžeme z předpisu rozhodnout, kterým směrem se posune vrchol kvadratické funkce?

Spočteme si v tabulce hodnoty.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	16	9	4	1	0	1	4



Graf se posunul o jedna doprava. Zdůvodnění:

- Za x musíme dosadit 1, aby v závorce, kterou dáváme na druhou, byla 0 \Rightarrow vrchol paraboly leží v bodě $[1; 0]$ a graf se tedy posunul o 1 doprava.
- Předpis $y = (x-1)^2$: před umocněním na druhou dosazované hodnoty x zmenšíme o 1 \Rightarrow do funkce $y = (x-1)^2$ musíme dosadit o 1 větší hodnotu x , abychom získali stejnou hodnotu y jako u funkce $y = x^2$ \Rightarrow graf se posune o 1 doprava.

Shrnutí: