

4.4.24 Grafické řešení rovnic a jejich soustav

Předpoklady: 040423

Pedagogická poznámka: V této hodině kreslíme na čtverečkovaný papír tak, aby jeden čtvereček představovala vzdálenost 1.

Př. 1: Vyřeš graficky soustavu rovnic $x + y = 5$
 $2x - y = 4$. Výsledek zkontroluj početně.

Grafické řešení:

Soustava má dvě rovnice, obě můžeme převést na lineární funkce.

- první rovnice $x + y = 5 \Rightarrow$ funkce $y = 5 - x$,
- pravá strana: $2x - y = 4 \Rightarrow$ funkce $y = 2x - 4$,

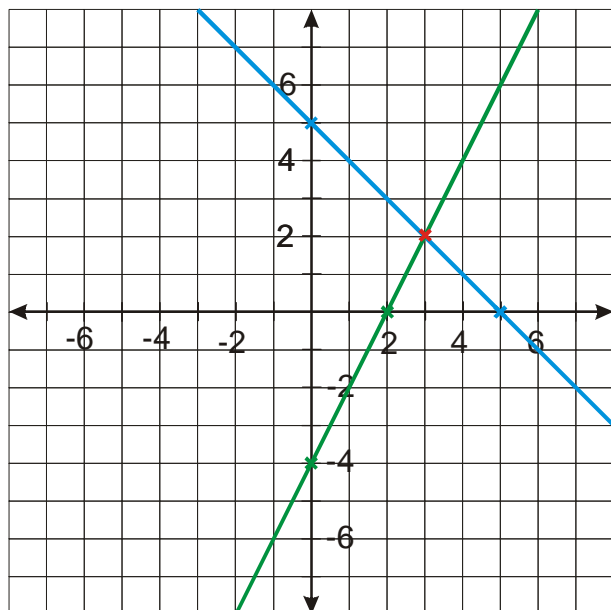
\Rightarrow nakreslíme grafy funkcí $y = 5 - x$, $y = 2x - 4$ a hledáme místo, ve kterém se protnou (v průsečíku mají obě funkce stejnou hodnotu obou proměnných – najdeme dvojici x, y která vyhovuje oběma rovnicím).

$$y = 5 - x$$

x	0	5
$y = 5 - x$	5	0

$$y = 2x - 4$$

x	0	2
$y = 2x - 4$	-4	0



Grafy se protínají v bodě $[3; 2] \Rightarrow$ hledanou dvojicí čísel je $x = 3, y = 2$.

Početní řešení:

$$x + y = 5$$

$$2x - y = 4$$

$$3x = 9 \quad / : 3$$

$$x = 3$$

$$y = 5 - x = 5 - 3 = 2$$

$$K = \{[3; 2]\}$$

Př. 2: Vyřeš graficky soustavu rovnic $2x - y = 3$
 $4x - 2y = 2$. Výsledek zkontroluj početně.

Grafické řešení:

Soustava má dvě rovnice, obě můžeme převést na lineární funkce.

- první rovnice $2x - y = 3 \Rightarrow$ funkce $y = 2x - 3$,
- pravá strana: $4x - 2y = 2 \Rightarrow$ funkce $2y = 4x - 2 \Rightarrow y = 2x - 1$,

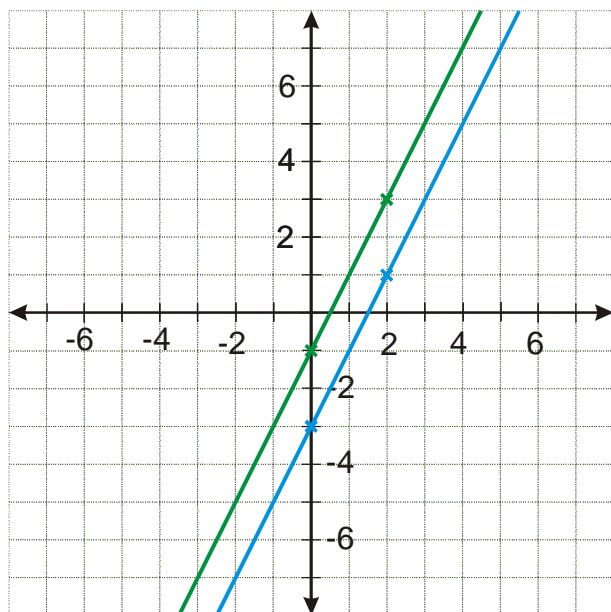
\Rightarrow nakreslíme grafy funkcí $y = 2x - 3$, $y = 2x - 1$ a hledáme místo, ve kterém se protnou (v průsečíku mají obě funkce stejnou hodnotu obou proměnných – najdeme dvojici x, y která vyhovuje oběma rovnicím).

$$y = 2x - 3$$

x	0	2
$y = 2x - 3$	-3	1

$$y = 2x - 1$$

x	0	2
$y = 2x - 1$	-1	3



Grafy jsou rovnoběžné přímky, které se nikdy neprotínají \Rightarrow soustava rovnic nemá řešení.

Početní řešení:

$$2x - y = 3$$

$$4x - 2y = 2 \quad /:2$$

$$\hline 2x - y = 3$$

$$2x - y = 1$$

$$\hline 0 \neq 2$$

$$K = \emptyset$$

Př. 3: Soustavy dvou lineárních rovnic můžeme rozdělit podle počtu řešení na tři typy. V předchozích dvou příkladech jsme si ukázali grafické řešení dvou typů. Jaký je třetí typ? Napiš soustavu tohoto typu a vyřeš ji graficky. Ještě před grafickým řešením odhadni, jak bude vypadat.

Tři typy soustav dvou lineárních rovnic:

- jedno řešení: příklad 8,
- žádné řešení: příklad 9,
- nekonečně mnoho řešení: zatím bez příkladů.

Soustava s nekonečně mnoha řešeními obsahuje dvě rovnice, které jsou po úpravách stejné \Rightarrow grafické řešení bude představovat dvojice stejných přímek (dvě stejné funkce se stejnými grafy).

Příklad: $x - y = 2$
 $2x - 2y = 4$

Grafické řešení:

Soustava má dvě rovnice, obě můžeme převést na lineární funkce.

- první rovnice $x - y = 2 \Rightarrow$ funkce $y = x - 2$,
- pravá strana: $2x - 2y = 4 \Rightarrow$ funkce $2y = 2x - 4 \Rightarrow y = x - 2$,

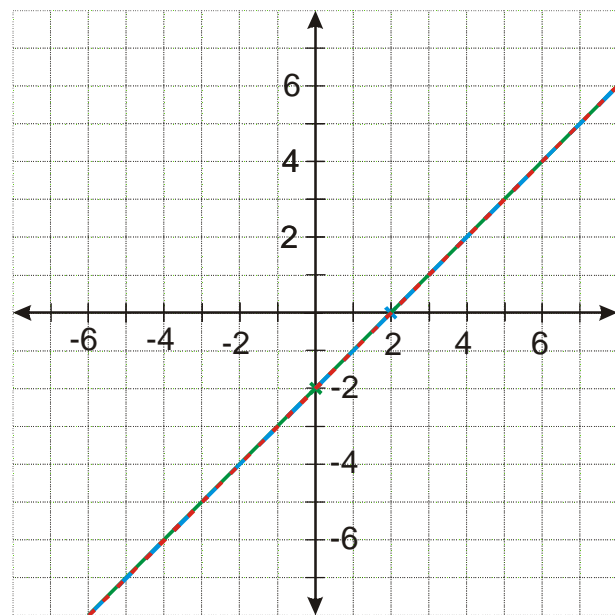
\Rightarrow dvakrát kreslíme jednu a tu samou funkci \Rightarrow všechny body této funkce jsou průsečíky a všechny představují řešení soustavy.

$y = x - 2$

x	0	2
$y = x - 2$	-2	0

$y = x - 2$

x	0	2
$y = x - 2$	-2	0



Grafy jsou totožné přímky, které se protínají ve všech bodech \Rightarrow soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení $K = \{[x; x - 2], x \in R\}$.

Počtení řešení:

$$\begin{array}{r}
 x - y = 2 \\
 2x - 2y = 4 \quad / : 2 \\
 \hline
 x - y = 2 \\
 x - y = 2 \\
 \hline
 0 = 0
 \end{array}$$

$$K = \{[x; x - 2], x \in R\}$$

Př. 4: Vyřeš graficky rovnici $x^2 = 2 - x$. Výsledek zkontroluj počteně.

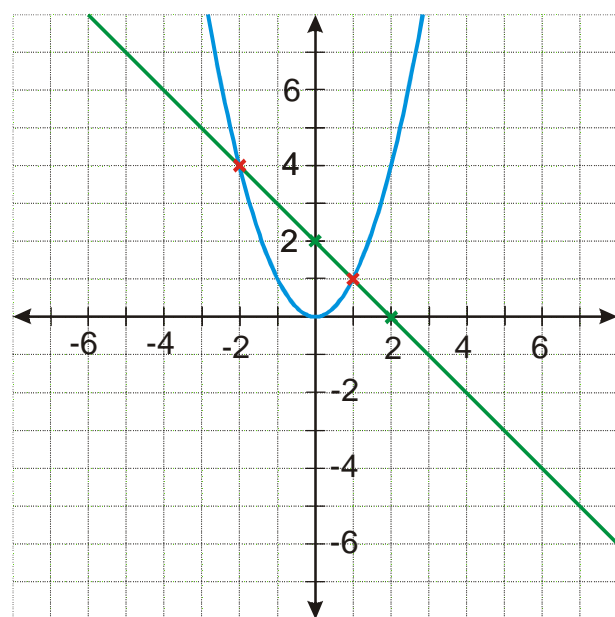
Grafické řešení:

- levá strana $x^2 \Rightarrow$ hodnoty funkce $y = x^2$,
- pravá strana: $2 - x \Rightarrow$ hodnoty funkce $y = 2 - x$,

\Rightarrow nakreslíme grafy funkcí $y = x^2$, $y = 2 - x$ a hledáme místo, ve kterém se protnou (mají stejnou hodnotu).

x	-1	0	1
$y = x^2$	1	0	1

x	0	2
$y = 2 - x$	2	0



Grafy se protínají v bodech $[-2; 4]$ a $[1; 1] \Rightarrow$ rovnice má dvě řešení -2 a 1 .

Počtení řešení:

$$x^2 = 2 - x$$

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 1$$

$$K = \{-2; 1\}$$

Př. 5: Vyřeš graficky rovnici $x^2 - 2x - 3 = 0$. Výsledek zkontroluj počteně.

Grafické řešení:

Graf funkce $y = x^2 - 2x - 3$ nakreslit neumíme, ale můžeme rovnici upravit tak, aby na levé straně zůstal pouze člen x^2 .

$$x^2 = 2x + 3$$

- levá strana $x^2 \Rightarrow$ hodnoty funkce $y = x^2$,
- pravá strana: $2x + 3 \Rightarrow$ hodnoty funkce $y = 2x + 3$,

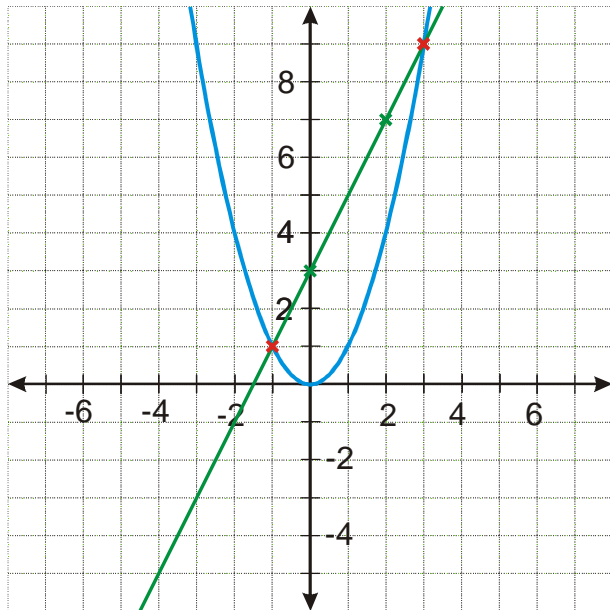
\Rightarrow nakreslíme grafy funkcí $y = x^2$, $y = 2x + 3$ a hledáme místo, ve kterém se protnou (mají stejnou hodnotu).

$$y = x^2$$

x	-1	0	1
$y = x^2$	1	0	1

$$y = 2x + 3$$

x	0	2
$y = 2x + 3$	3	7



Grafy se protínají v bodech $[-1; 1]$ a $[3; 9]$ \Rightarrow rovnice má dvě řešení -1 a 3 .

Počtení řešení:

$$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = 3$$

$$K = \{-1; 3\}$$

Př. 6: Vyřeš graficky rovnici $x^2 - 2x + 1 = 0$. Výsledek zkontroluj počteně.

Grafické řešení:

Graf funkce $x^2 - 2x + 1 = 0$ nakreslit neumíme, ale můžeme rovnici upravit tak, aby na levé straně zůstal pouze člen x^2 .

$$x^2 = 2x - 1$$

- levá strana $x^2 \Rightarrow$ hodnoty funkce $y = x^2$,
- pravá strana: $2x - 1 \Rightarrow$ hodnoty funkce $y = 2x - 1$,

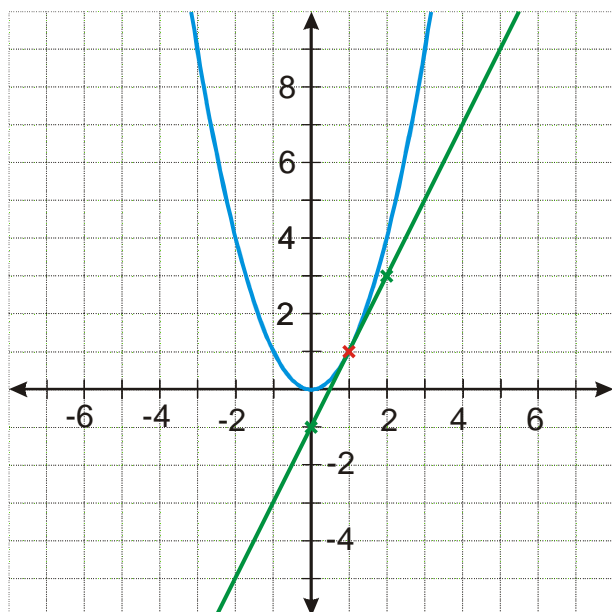
\Rightarrow nakreslíme grafy funkcí $y = x^2$, $y = 2x - 1$ a hledáme místo, ve kterém se protnou (mají stejnou hodnotu).

$$y = x^2$$

x	-1	0	1
$y = x^2$	1	0	1

$$y = 2x - 1$$

x	0	2
$y = 2x - 1$	-1	3



Grafy se protínají v bodu $[1; 1] \Rightarrow$ rovnice má jedno řešení 1.

Počtení řešení:

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x - 1)$$

$$x_1 = x_2 = 1$$

$$K = \{1\}$$

Př. 7: Vyřeš graficky rovnici $|x| = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Grafické řešení:

$$|x| = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

- levá strana $|x| \Rightarrow$ hodnoty funkce $y = |x|$,
- pravá strana: $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \Rightarrow$ hodnoty funkce $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$,

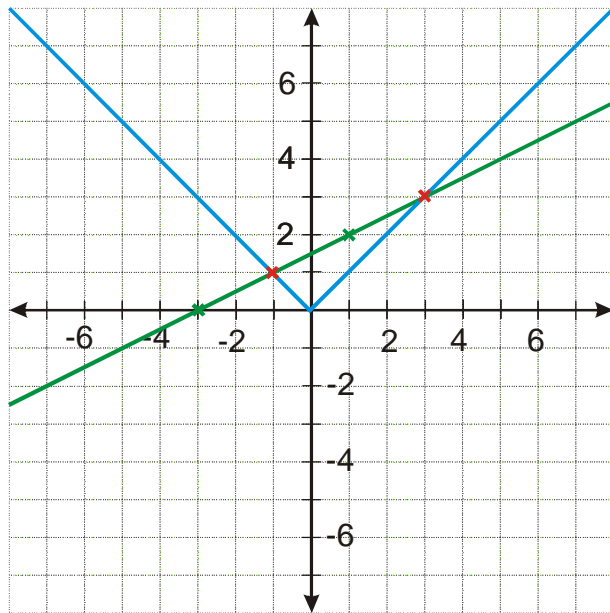
\Rightarrow nakreslíme grafy funkcí $y = |x|$, $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ a hledáme místo, ve kterém se protnou (mají stejnou hodnotu).

$$y = |x|$$

x	-1	0	1
$y = x $	1	0	1

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

x	-3	1
$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$	0	2



Grafy se protínají v bodech $[-1; 1]$ a $[3; 3] \Rightarrow$ rovnice má dvě řešení -1 a 3 .

$$K = \{-1; 3\}$$

Př. 8: Vyřeš graficky rovnici $x = \frac{1}{x}$. Výsledek zkontroluj početně.

Př. 9: Vyřeš graficky rovnici $|x| + 1 = 1 - x$. Výsledek zkontroluj početně.

Shrnutí: