

#### 4.4.25 Grafické řešení slovních úloh

**Předpoklady:** 040424

**Pedagogická poznámka:** Než se žáci v příkladu 1 vrhnou do kreslení grafu, je třeba je zastavit, aby si rozmysleli měřítko a osy a orientaci grafu.

**Př. 1:** Jako záložní zdroj elektrické energie nutné k chlazení mrazáků je ve vědeckém ústavu použita elektrocentrála s benzínovým motorem a s nádrží o objemu 24 l. Při kontrole po nástupu do služby v 6:00 zjistil technik, že centrála běží a v nádrži (která je standardně zcela plná) zbývá ještě 17 litrů benzínu, při další kontrole v 13:30 bylo v nádrži ještě 11 litrů benzínu. V kolik hodin došlo k výpadku elektrického proudu? Do kolika hodin při zachování spotřeby vystačí benzín v nádrži? Příklad řeš nejdříve graficky, poté najdi předpis funkce (přesný tvar s konstantami ve tvaru zlomku), která udává množství benzínu v nádrži a výsledky překontroluj početně.

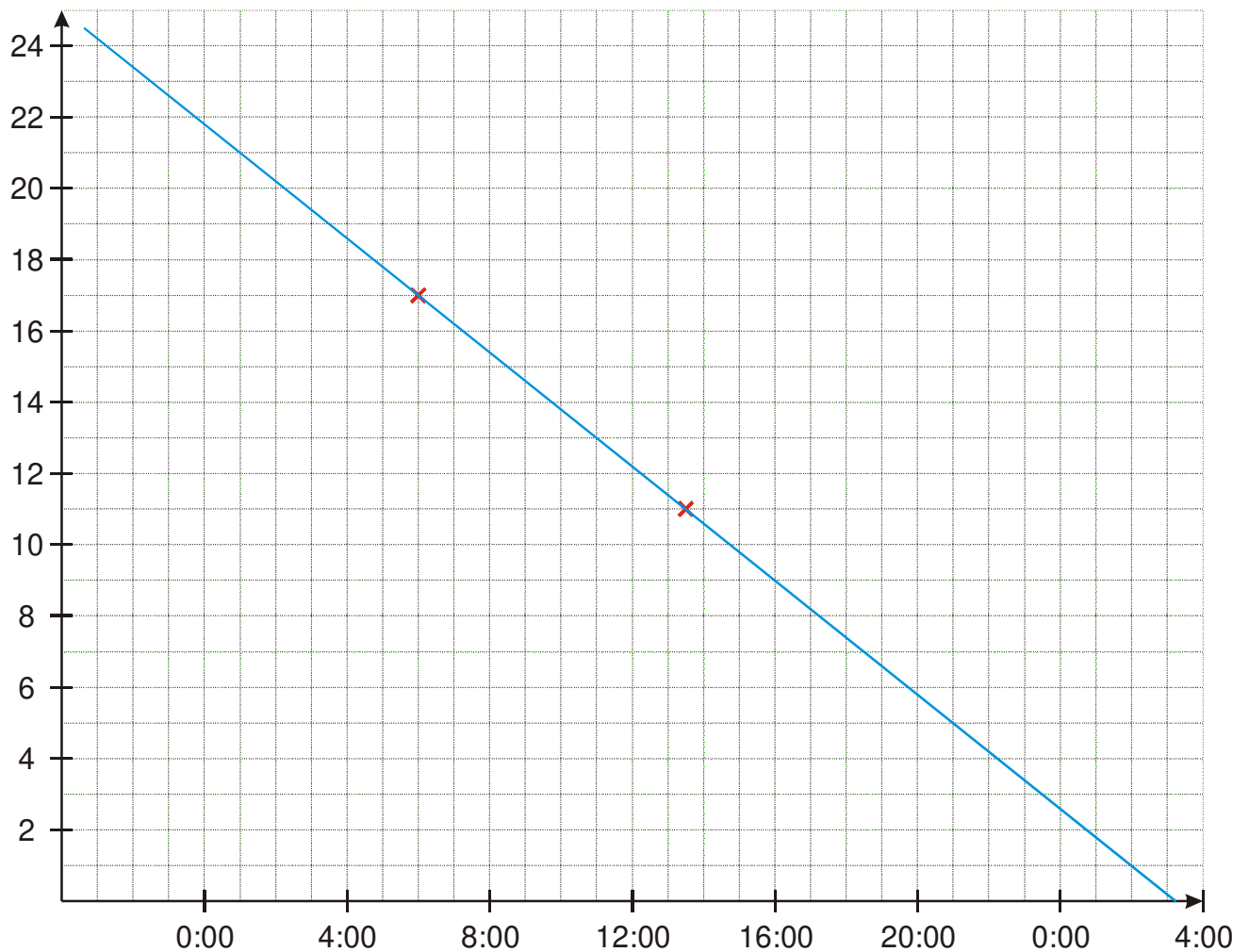
Nejdříve musíme odhadnout měřítko osy a orientaci grafu.

Papír k dispozici: A5 přibližně 40 x 29 čtverečků  $\Rightarrow$

- kratší strana papíru: objem benzínu, 1 čtvereček odpovídá 1 l (osy budeme popisovat po dvou čtverečcích),
- delší strana papíru: odhad doby děje: mezi měřeními uběhlo 7,5 h, za tu dobu ubylo 6 litrů benzínu  $\Rightarrow$  celý děj bude trvat přibližně čtyřikrát déle tedy 32 hodin, a začne už předchozí den  $\Rightarrow$  1 čtvereček odpovídá 1 h, osa musí začínat ve 20:00 předchozího dne.

Z grafu můžeme odečíst:

- výpadek proudu nastal přibližně v 21:20 předchozího dne (bod grafu s y-ovou hodnotou 24)
- při zachování spotřeby bude nádrž prázdná přibližně v 3:15 následujícího dne (průsečík s osou  $x$ , y-ová hodnota 0),



Graf funkce prochází dvěma body:

- $[6; 17]$  - v 6 hodin bylo v nádrži 17 litrů
- $[13,5; 11]$  - v 13:30 bylo v nádrži 11 litrů

Dosadíme do předpisu lineární funkce  $y = ax + b$ :

$$[6; 17]: 17 = a \cdot 6 + b$$

$$[13,5; 11]: 11 = 13,5 a + b$$

Rovnice odečteme:  $-6 = 7,5a \quad | : 7,5$

$$a = -\frac{6}{7,5} = -\frac{12}{15} = -\frac{4}{5}$$

Dosadíme  $a$  do první rovnice  $17 = a \cdot 6 + b$  a vypočteme  $b$ :

$$17 = \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot 6 + b = -\frac{24}{5} + b \quad | + \frac{24}{5}$$

$$b = 17 + \frac{24}{5} = \frac{89 + 24}{5} = \frac{109}{5}$$

Množství benzínu v nádrži je popsáno funkcí:  $y = -\frac{4}{5}x + \frac{109}{5}$ .

Výpadek proudu nastal, když v nádrži bylo 24 litrů benzínu ( $y = 24$ ).

$$24 = -\frac{4}{5}x + \frac{109}{5} \quad / \cdot 5$$

$$120 = -4x + 109 \quad / -120 + 4x$$

$$4x = -11 \quad / : 4$$

$$x = -\frac{11}{4} = -2\frac{3}{4}$$

Výpadek proudu nastal dvě a tři čtvrtě hodiny před půlnocí, tedy ve 21:15 předchozího dne.

Benzín v nádrži dojde v okamžiku, kdy bude platit  $y = 0$ .

$$0 = -\frac{4}{5}x + \frac{109}{5} \quad / \cdot 5$$

$$0 = -4x + 109 \quad / +4x$$

$$4x = 109 \quad / : 4$$

$$x = \frac{109}{4} = 27\frac{1}{4}$$

Benzín v nádrži dojde ve 3:15 následujícího dne ráno.

**Př. 2:** Z grafu sestrojeného v předchozím příkladu zjisti:

- Kolik benzínu bylo v nádrži v 19:00?
- V kolik hodin bylo v nádrži 10 litrů benzínu?
- Pokud klesne množství benzínu v nádrži pod 3 litry, je povinností obsluhy ihned doplnit nádrž. V kolik hodin k tomu dojde?

a) Kolik benzínu bylo v nádrži v 19:00?

Odečtení z grafu: přibližně 6,7 litru.

Výpočet: Dosazujeme  $x = 19$ .

$$y = -\frac{4}{5}x + \frac{109}{5} = -\frac{4}{5} \cdot 19 + \frac{109}{5} = \frac{-76 + 109}{5} = \frac{33}{5} = 6,6 \text{ litru}$$

b) V kolik hodin bylo v nádrži 10 litrů benzínu?

Odečtení z grafu: přibližně 14:40.

Výpočet: Dosazujeme  $y = 10$ .

$$10 = -\frac{4}{5}x + \frac{109}{5} \quad / \cdot 5$$

$$50 = -4x + 109 \quad / +4x - 50$$

$$4x = 59 \quad / : 4$$

$$x = 14,75 \Rightarrow 10 \text{ litrů benzínu bylo v nádrži ve 14:45.}$$

c) Pokud klesne množství benzínu v nádrži pod 3 litry, je povinností obsluhy ihned doplnit nádrž. V kolik hodin k tomu dojde?

Odečtení z grafu: přibližně 23:30.

Výpočet: Dosazujeme  $y = 3$ .

$$3 = -\frac{4}{5}x + \frac{109}{5} \quad / \cdot 5$$

$$15 = -4x + 109 \quad / +4x - 15$$

$$4x = 94 \quad / : 4$$

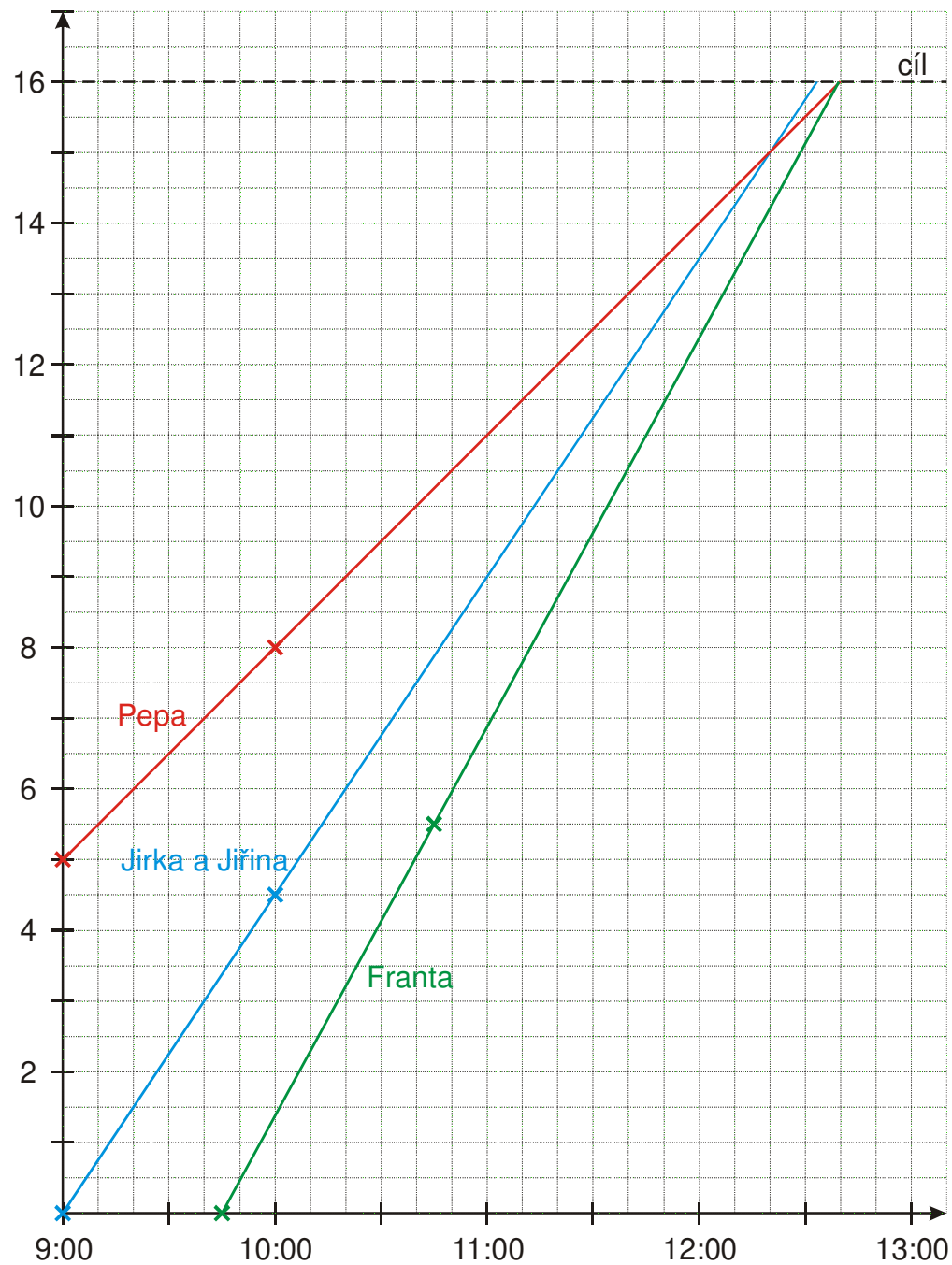
$x = 23,5 \Rightarrow$  3 litry benzínu budou v nádrži ve 23:30.

**Př. 3:** Tři spolužáci se zúčastnili výročního pochodu na 16 km Jarní šlápoty. Pepa dělal doprovod mladší sestřičce a tak vyrazili v 9:00 na zkrácenou trasu, která začínala na 5. km pochodu a šli pomalu rychlostí 3 km/h. Jirka s Jiřinou vyrazili také v 9:00 z oficiálního startu a do cíle se blížili rychlostí 4,5 km/h. Franta jako obvykle zaspal, takže se na start dostal až v 9:45 a aby nebyl v cíli poslední, pospíchal rychlostí 5,5 km/h. Potkali se někteří dva na trase? Pokud ano, kdy a kde? V jakém pořadí dorazili do cíle? V kolik hodin?

Nejdříve musíme odhadnout měřítko os a orientaci grafu.

Papír k dispozici: A5 přibližně 40 x 29 čtverečků  $\Rightarrow$

- delší strana papíru: ušlé km (osa  $y$ ), 1 čtvereček odpovídá 0,5 km (využijeme 32 čtverečků),
- kratší strana papíru: odhad doby děje: mají ujít 16 km rychlostí 5 km  $\Rightarrow$  celý děj bude trvat přibližně čtyři hodiny  $\Rightarrow$  1 hodina odpovídá 6 čtverečků (1 čtvereček představuje 10 minut).



Z grafu můžeme odečíst:

- na trase se potkali:
  - Jirka s Jiřinou a Pepa se sestřičkou, přibližně na 15 km od startu v 12:20,
  - Franta s Pepou přibližně v cíli v 12:40.
- nejdříve do cíle dorazil Jirka s Jiřinou v 12:35, Franta s Pepou přišli přibližně nastejno ve 12:40.

**Pedagogická poznámka:** Pokud žáci tvoří grafy v Geogebře, je třeba dát pozor na zadávání časů u Franty. Místo správných 9.75 se často objevuje 9.45.

**Př. 4:** Najdi v grafu předchozího příkladu.

a) Kde byl každý z účastníků pochodu v 11:00?

b) V kolik hodin se jednotliví účastníci dostali na 10. km pochodu?

a) Kde byl každý z účastníků pochodu v 11:00?

- Pepa 11 km od startu,
- Jirka s Jiřinou 9 km od startu,
- Franta přibližně 6,8 km od startu.

b) V kolik hodin se jednotliví účastníci dostali na 10 km pochodu?

- Pepa v 10:42,
- Jirka s Jiřinou v 11:15,
- Franta v 11:35.

**Př. 5:** Ověř výsledky dvou předchozích příkladů výpočty s přesností na desítky metrů a minuty.

Setkání na trase:

Jirka s Jiřinou se potkají s Pepou:  $s_p = s_j - 5$  (Pepa nevyrážel ze startu, ale z 5 km)

Dráha Jirky a Jiřiny:  $v_j t_j$ , dráha Pepy:  $v_p t_p$ .

Dosadíme:  $v_j t_j - 5 = v_p t_p$ .

Platí  $t_p = t_j = t$  (všichni vyrazili ve stejný okamžik), dosadíme rychlosti:

$$4,5t - 5 = 3t \quad / +5 - 3t$$

$$1,5t = 5 \quad / :1,5$$

$$t = \frac{5}{1,5} = \frac{50}{15} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

$$s_j = v_j t_j = 4,5 \cdot \frac{10}{3} = \frac{45}{3} = 15$$

Jirka s Jiřinou potkají Pepu za 3hodiny 20 minut, tedy ve 12:20 na 15 km pochodu.

Franta se potká s Pepou:  $s_p = s_f - 5$  (Pepa nevyrážel ze startu, ale z 5 km)

Dráha Franty:  $v_f t_f$ , dráha Pepy:  $v_p t_p$ .

Dosadíme:  $v_f t_f - 5 = v_p t_p$ .

Platí  $t_f = t_p - \frac{45}{60} = t_p - \frac{3}{4}$  (Franta vyrazil až v 9:45), dosadíme rychlosti:

$$5,5 \left( t - \frac{3}{4} \right) - 5 = 3t$$

$$5,5t - \frac{16,5}{4} - 5 = 3t \quad / -3t + 5 + \frac{16,5}{4}$$

$$2,5t = 5 + \frac{16,5}{4} \quad / \cdot 4$$

$$10t = 20 + 16,5$$

$$10t = 36,5$$

$$t = 3,65 = 3 \text{ h } 39 \text{ min}$$

$$s_f = v_f t_f = 3 \cdot 3,65 = 10,95$$

Franta dohoní Pepu za 3 hodiny 39 minut, tedy ve 12:39 na 15,95 km pochodu (tedy 50 před cílem).

Vzdálenost od startu v 11:00:

- Pepa:  $s = 5 + 3 \cdot 2 = 11$  km
- Jirka s Jiřinou:  $s = 4,5 \cdot 2 = 9$  km
- Franta:  $s = 5,5 \cdot 1,25 \doteq 6,9$  km

Kdy se dostali na 10 km pochodu?

- Pepa (musí ujít jen 5 km):  $t = \frac{5}{3} h = 1 \text{ h } 40 \text{ min} \Rightarrow$  v 10:40 hod.
- Jirka s Jiřinou:  $t = \frac{10}{4,5} h = 2 \text{ h } 13 \text{ min} \Rightarrow$  v 11:13 hod.
- Pepa:  $t = \frac{10}{5,5} h = 1 \text{ h } 49 \text{ min} \Rightarrow$  v 11:34 hod.

**Shrnutí:**