

4.5.9 Pravděpodobnost II

Předpoklady: 040508

Př. 1: Který z výsledků hodu mincí čtyřikrát po sobě je pravděpodobnější.

a) r, l, r, l

b) r, r, r, r

Oba výsledky jsou stejně pravděpodobné (pravděpodobnost $0,5^4 = 0,0625$) při každém hodu máme přesně předepsáno, co musí padnout (v prvním případě nejdřív rub, pak líc, pak rub a naposledy líc, v druhém pokaždé rub), oba výsledky mají stejnou pravděpodobnost $0,5 \Rightarrow$ čtyřikrát násobíme číslem $0,5$.

Př. 2: Proved' čtyři hody mincí. Po každém hodu zapiš výsledek (sleduj tedy nejen počet lidí a rubů, ale i pořadí, ve kterém padaly).

Vyšlo například r, r, r, l .

Výsledky pokusu ve třídě:

- 4 ruby padly u 4 lidí,
- 2 ruby a 2 líce padly u 14 lidí.

Př. 3: Vysvětli rozpor: Ačkoliv jsme zjistili, že výsledky r, l, r, l a r, r, r, r jsou stejně pravděpodobné, výsledek „2 ruby, dva líce“ padl v předchozím příkladu častěji než výsledek „4 ruby“.

„4 ruby“ je stejný výsledek jako r, r, r, r (4 ruby nemohou padnout jinak než jako r, r, r, r).

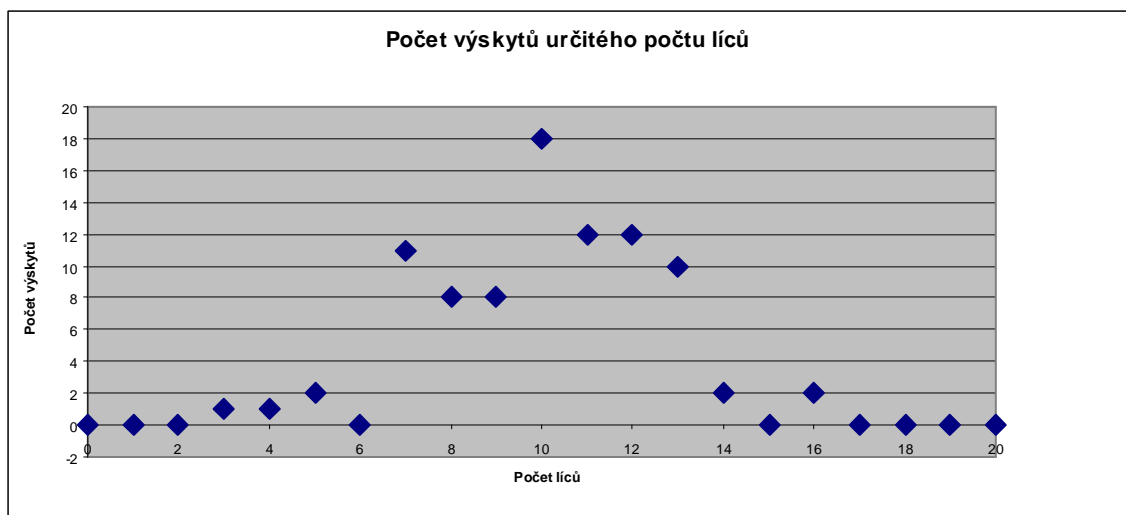
„2 ruby, 2 líce“ není stejný výsledek jako r, l, r, l (2 ruby, 2 líce mohou padnout i jinými způsoby, například l, r, l, r)

\Rightarrow pravděpodobnost výsledku „2 ruby, 2 líce“ je vyšší než výsledku „4 ruby“

Jak to dopadlo v našem pokusu (výsledky, které se jeví jako „2 ruby, 2 líce“:

- r, l, r, l padlo 3 krát,
- l, r, l, r padlo 2 krát,
- l, l, r, r padlo 4 krát,
- r, r, l, l padlo 2 krát,
- l, r, r, l padlo 1 krát,
- r, l, l, r padlo 2 krát.

Ke stejnému závěru jsme došli už v poslední hodině. Při 20 hodech s mincí padaly častěji výsledky, které mohou padat více způsoby (s přibližně stejným počtem líců a rubů), zatímco výsledky, které mohly padnout jediným způsobem (20 líců nebo 20 rubů), vůbec nepadly.



Pravděpodobnost, že padne výsledek, kterému vyhovuje více možností, získáme tak, že sečteme pravděpodobnosti těchto možností (pokud jsou stejně pravděpodobné, tak vynásobení pravděpodobnosti počtem možností).

Př. 4: V roce 2007 se v České republice narodilo 114 632 dětí z toho 58475 chlapců, z toho v jihozápadních Čechách 13052 dětí z toho chlapců 6562. Urči pravděpodobnost narození chlapce v ČR. Urči pravděpodobnost narození chlapce v jihozápadních Čechách. Jaké jsou pravděpodobnosti narození dívek?

Relativní četnost narození chlapce v ČR: $\frac{58475}{114632} = 0,510$.

Relativní četnost narození chlapce v jihozápadních Čechách: $\frac{6562}{13052} = 0,503$.

Pravděpodobnost narození chlapce v ČR bude ležet blízko hodnoty 0,510 (hodnota 0,503 je spočtena z menšího počtu porodů a jen v části republiky).

Př. 5: Urči pravděpodobnost, že se rodině v jihozápadních Čechách narodí:
 a) dva chlapci, b) dvě dívky, c) nejdřív chlapec, pak dívka
 d) chlapec a dívka v libovolném pořadí.

a) dva chlapci
 $0,503 \cdot 0,503 = 0,253009$

b) dvě dívky
 $0,497 \cdot 0,497 = 0,247009$

c) nejdřív chlapec, pak dívka
 $0,503 \cdot 0,497 = 0,249991$

d) chlapec a dívka v libovolném pořadí
 Výsledek můžeme získat dvěma způsoby (první chlapec, druhá dívka nebo první dívka, druhý chlapec)
 $2 \cdot 0,503 \cdot 0,497 = 0,499982$

Př. 6: V osudí jsou 2 zelené, 5 modrých a 3 červené jinak nerozlišitelné koule. Koule jsou náhodně taženy a po určení barvy zase vráceny do osudí (vždy taháme z plného počtu koulí). Urči pravděpodobnost vytažení:

- a) modré koule,
- b) červené nebo modré koule,
- c) zelené a pak červené koule,
- d) dvou červených koulí po sobě,
- e) dvou koulí stejné barvy ve dvou následujících tazích,
- f) koulí všech tří barev ve třech po sobě jdoucích tazích.

Pokud rozlišíme koule, je tažení každé koule stejně pravděpodobné a pravděpodobnost tažení každé z nich $\frac{1}{10}$.

a) Modrých koulí je 5 \Rightarrow pravděpodobnost tažení modré koule je $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

Zelené koule jsou 2 \Rightarrow pravděpodobnost tažení zelené koule je $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

Červené koule jsou 3 \Rightarrow pravděpodobnost tažení červené koule je $\frac{3}{10}$.

b) červené nebo modré koule

Červených a modrých koulí je 8 \Rightarrow pravděpodobnost tažení červené nebo modré koule je $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

c) zelené a pak červené koule

$$\frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{50}$$

d) dvou červených koulí po sobě

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{100}$$

e) dvou koulí stejné barvy ve dvou následujících tazích

Dvě červené po sobě: $\frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{100}$.

Dvě modré po sobě: $\frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{25}{100}$.

Dvě zelené po sobě: $\frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{4}{100}$.

Dvě libovolné barvy po sobě: $\frac{9}{100} + \frac{25}{100} + \frac{4}{100} = \frac{38}{100} = \frac{19}{50}$.

f) koulí všech tří barev ve třech po sobě jdoucích tazích

Pravděpodobnost, že vytáhneme modrou, pak červenou a nakonec zelenou kouli:

$$\frac{5}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{3}{100}$$

Možností, jak vytáhnou postupně tři různé barvy je šest (mčz, mzč, čmz, čzm, zmč, zčm) \Rightarrow
pravděpodobnost postupného vytažení všech tří barev: $6 \cdot \frac{3}{100} = \frac{9}{50}$.

Př. 7: Urči pravděpodobnost, že při tažení koulí v předchozím příkladu nebude ve dvou po sobě jdoucích tazích tažena modrá koule.

Možností, jak nevytáhnou dvakrát po sobě modrou kouli je strašně mnoho \Rightarrow velmi složité počítání.

Trik: Souhrnná pravděpodobnost všech možností je 1, pravděpodobnost, že dvakrát po sobě

vytáhneme modrou kouli $\frac{25}{100} = \frac{1}{4} \Rightarrow$ pravděpodobnost, že dvakrát po sobě modrou kouli

nevytáhneme je $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Př. 8: V osudí je 6 modrých a 4 červené koule. Koule jsou náhodně taženy a po určení barvy se nevrací do osudí. Urči pravděpodobnost vytažení:

- a) modré koule v prvním tahu, b) modré koule v prvním a červené v druhém tahu,
c) červené koule v druhém tahu.

a) modré koule v prvním tahu

$$\frac{6}{10}$$

b) modré koule v prvním a červené v druhém tahu

Modrá koule v prvním tahu: $\frac{6}{10}$

Červená v druhém tahu, když v prvním byla tažena modrá: $\frac{4}{9}$ (v osudí zůstává už jen 9 koulí z toho čtyři červené).

Modré koule v prvním a červená v druhém tahu: $\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{15}$

c) červené koule v druhém tahu

Dvě možnosti, jak můžeme táhnout červenou kouli v druhém tahu:

červená koule v prvním i v druhém tahu: $\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$

modrá koule v prvním a červená v druhém: $\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{15}$

Červená koule v druhém tahu: $\frac{2}{15} + \frac{4}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

Shrnutí: