4.5.14 Spoříme a půjčujeme II

Předpoklady: 040513

Př. 1: Honza uložil na 3 roky do banky 250 000 Kč s roční úrokovou mírou 0,48 %. Úrok mu banka každý rok odesílá na běžný účet. Jakou částkou bude po třech letech disponovat, pokud nic neutratí?

Úrok v jednom roce: $250\,000 \cdot 0,0048 \cdot 0,85 = 1\,020$ Kč.
Úrok za tři roky: $3 \cdot 1\,020 = 3\,060$ Kč.

Po třech letech bude Honza disponovat částkou 253 060 Kč.

Př. 2: Honza uložil na 3 roky do banky 250 000 Kč s roční úrokovou mírou 0,48 %. Úrok není po skončení úrokovacího období odesílán na jeho účet, ale připisován k vkladu. Jakou částku bude mít po třech letech k dispozici? Při výpočtu zaokrouhluj na haléře.

Úrok v jednom roce: $250\,000 \cdot 0,0048 \cdot 0,85 = 1\,020$ Kč.
Po první roce má uloženo (a úrok v druhém roce se počítá z částky) $251\,020$.

Úrok v druhém roce: $251\,020 \cdot 0,0048 \cdot 0,85 = 1\,024,16$ Kč.
Po druhém roce má uloženo (a úrok v třetím roce se počítá z částky)
$251\,020 + 1\,024,16 = 252\,044,16$ Kč.

Úrok v třetím roce: $252\,044,16 \cdot 0,0048 \cdot 0,85 = 1\,028,34$ Kč.

Celková částka po třech letech: $252\,044,16 + 1\,028,34 = 253\,072,50$ Kč

Druhým způsobem si Honza naspoří více (banka v dalších letech úročí i úroky, které Honza získal v předchozích letech). Označuje se jako **složené úrokování.**
Postup, při kterém si věřitel úroky vybírá (a banka je tedy dále neúročí) se označuje jako **jednoduché úrokování**.

Složené úrokování je zdá se složité výpočtem. Pokud bychom postupovali jako při řešení příkladu, byl by výpočet naspořené částky po 20 letech úkolem na několik hodin.

Zkusíme si postup projít ještě jednou a zapisovat ho tak, abychom odvodili přijatelný vzorec.

Úrok v jednom roce: $250\,000 \cdot 0,0048 \cdot 0,85 = 1\,020$ Kč.
Po první roce má uloženo (a úrok v druhém roce se počítá z částky)
$251\,020 = 250\,000 + 250\,000 \cdot 0,0048 \cdot 0,85 = 250\,000 \cdot (1 + 0,0048 \cdot 0,85)$

Úrok v druhém roce: $250\,000\cdot(1+0{,}0048\cdot 0{,}85)\cdot 0{,}0048\cdot 0{,}85$ Kč.

Po druhém roce má uloženo (a úrok v třetím roce se počítá z částky)

$$250\,000\cdot(1+0{,}0048\cdot 0{,}85)+250\,000\cdot(1+0{,}0048\cdot 0{,}85)\cdot 0{,}0048\cdot 0{,}85=$$

$$=250\,000\cdot(1+0{,}0048\cdot 0{,}85)\cdot(1+0{,}0048\cdot 0{,}85)=250\,000\cdot(1+0{,}0048\cdot 0{,}85)^2$$

Úrok v třetím roce: $250\,000\cdot(1+0{,}0048\cdot 0{,}85)\cdot 0{,}0048\cdot 0{,}85$ Kč.

Po třetím roce má uloženo (a úrok v čtvrtém roce se počítá z částky)

$$250\,000\cdot(1+0{,}0048\cdot 0{,}85)^2+250\,000\cdot(1+0{,}0048\cdot 0{,}85)^2\cdot 0{,}0048\cdot 0{,}85=$$

$$=250\,000\cdot(1+0{,}0048\cdot 0{,}85)^2\cdot(1+0{,}0048\cdot 0{,}85)=250\,000\cdot(1+0{,}0048\cdot 0{,}85)^3$$

Př. 3: Napiš vztah, který udává částku, kterou Honza naspoří po pěti letech.

$$250\,000\cdot(1+0{,}0048\cdot 0{,}85)^5$$

Př. 4: Napiš vztah, který udává částku, kterou Honza naspoří po *n* letech.

$$250\,000\cdot(1+0{,}0048\cdot 0{,}85)^n$$

Př. 5: Kapitál, který budeme mít po *n* letech složeného úrokování našetřený v bance se označuje jako K_n, počáteční kapitál se značí K_0. Napiš vzorec pro výpočet částky, kterou si naspoříš po *n* letech složeného úrokování.

$$K_n=K_o\cdot(1+p\cdot 0{,}85)^n$$

Př. 6: Vypočti částku, kterou si naspoříš z 350 000 Kč, jestliže tuto částku uložíš:
a) na pět let s úrokem 1,2 % b) na 25 let s úrokem 1,5 %.

a) 350 000 Kč na pět let s úrokem 1,2 %

$$K_n=K_o\cdot(1+p\cdot 0{,}85)^n=350\,000(1+0{,}012\cdot 0{,}85)^5=368\,217{,}90\ \text{Kč}$$

b) 350 000 Kč na 25 let s úrokem 1,5 %

$$K_n=K_o\cdot(1+p\cdot 0{,}85)^n=350\,000(1+0{,}015\cdot 0{,}85)^{25}=480\,423{,}61\ \text{Kč}$$

Př. 7: Jakou částku bys měl našetřenou, kdyby Tvůj předek uložil v roce 1348 u příležitosti založení UK 100 Kč s roční úrokovou mírou 2,5 %?

Od roku 1348 uplynulo $2016-1348=668$ let.

$$K_n=K_o\cdot(1+p\cdot 0{,}85)^n=100(1+0{,}025\cdot 0{,}85)^{668}=125\,957\,042\ \text{Kč}$$

Př. 8: Období, po němž banka připisuje úrok se označuje jako úrokovací období. Úrokovací období nemusí být vždy 1 rok, například u běžných účtů bývá úrokovací období 1 den. Vypočti částku, kterou našetříš za 3 roky, jestliže uložíš 150 000 Kč

s úrokovou mírou 0,75 % a úrokovací období je:
a) rok b) půlrok c) měsíc d) den.

a) rok

$$K_n = K_o \cdot (1 + p \cdot 0,85)^n = 150\,000(1 + 0,0075 \cdot 0,85)^3 = 152\,887,08$$

b) půlrok

$$K_n = K_o \cdot (1 + p \cdot 0,85)^n = 150\,000\left(1 + \frac{0,0075}{2} \cdot 0,85\right)^{3\cdot 2} = 152\,891,71$$

c) měsíc

$$K_n = K_o \cdot (1 + p \cdot 0,85)^n = 150\,000\left(1 + \frac{0,0075}{12} \cdot 0,85\right)^{3\cdot 12} = 152\,895,58$$

d) den

$$K_n = K_o \cdot (1 + p \cdot 0,85)^n = 150\,000\left(1 + \frac{0,0075}{360} \cdot 0,85\right)^{3\cdot 360} = 152\,896,33$$

Př. 9: Uprav vzorec pro složené úrokování tak, aby umožňoval výpočet naspořené částky pro různá úrokovací období.

$$K_n = K_o \cdot \left(1 + \frac{p}{k} \cdot 0,85\right)^{n \cdot k}$$

Př. 10: Vysvětli slovo inflace.

Inflace

Peníze nemají v dnešní době žádnou hodnotu samy o sobě, jejich používání reguluje stát, v případě zhroucení ekonomiky se může stát, že svou hodnotu zcela nebo částečně ztratí (měnové krize a měnové reformy).
Proces znehodnocování peněz probíhá téměř neustále (ale pomalu) díky jevu zvanému inflace (znehodnocování peněz).

V době psaní tohoto textu byla meziroční míra inflace 6% $\Rightarrow$ peníze ztratily během uplynulých dvanácti měsíců 6% své hodnoty. Tedy za určitou částku je možné nyní nakoupit o 6% zboží méně než před rokem.
Výpočet míry inflace velmi závisí velmi na tom, u kterého zboží sledujeme ceny a jak výrazně tyto ceny do výsledku započítáváme. Výpočet inflace se provádí v závislosti na „spotřebním koši“ jehož obsah je vděčným námětem sporů uvnitř odborné veřejnosti (například je dlouhodobým sporem zda do inflace započítávat změny cen nemovitostí.

V Evropě se to nedělá s odůvodněním, že nákup nemovitosti není spotřeba, ale investice. Fakt, že spotřebitelé musí někde bydlet je trochu opomíjen. Hlavním důvodem tohoto přístupu je podle mnohých ekonomů fakt, že díky této zásadě vychází roční míra inflace v naprosté většině let nižší).
Roční míra inflace je průměrný údaj a faktický dopad zdražování je na různé vrstvy společnosti velmi různý (pokud zdražuje jídlo nebo energie dotýká se to spíš chudších vrstev).

Na druhou stranu není možné nahlížet na inflaci jako zcela záporný jev. Fakt, že peníze pomalu ztrácí hodnotu, přispívá k tomu, aby nebyly zbytečně stahovány z oběhu a ukládány doma a jejich vlastníci se je snažili investovat nebo utratit. Naopak vzácné chvíle, kdy je inflace záporná (peníze hodnotu získávají a zboží zlevňuje - deflace) jsou považovány (některými ekonomy) za velmi nebezpečné (lidé nespoří a neutrácejí, protože čekají až zboží ještě více zlevní a tím klesá výkon ekonomiky).

V následujících výpočtech ode všech podrobností odhlédneme a budeme uvažovat, že inflace znamená stejnoměrné znehodnocování peněz bez ohledu na dopad pro konkrétní druhy zboží. Pokud je roční míra inflace 3% znamená to, že se ceny v za rok v průměru zvýší o 3% $\Rightarrow$ zboží, které stálo na začátku roku 100 Kč, bude na konci roku stát 103 Kč.

Př. 11: Urči, jakou hodnotu bude mít 100 000 Kč za rok, pokud se potvrdí roční odhad inflace ve výši 3%.

Zboží za 100 Kč má na konci roku cenu 103 Kč.
Na konci roku budeme mít 100 000 Kč, zajímá nás, kolik Kč na začátku roku by stačilo na nákup stejného množství zboží.
zboží nakoupené na počátku roku za x Kč má na konci roku cenu 100000 Kč.
Přímá úměrnost:
počátek roku 100 Kč ... konec roku 103 Kč
počátek roku x Kč ... konec roku 100 000 Kč
$\frac{x}{100}=\frac{100000}{103} \Rightarrow x=\frac{100000\cdot 100}{103}=\frac{100000}{1,03}=97087$ Kč
Ztratili jsme skoro 3000 Kč.

Jaký je význam hodnot ve výsledném vztahu $x=\frac{100000}{1,03}$?

- 100 000 ... počáteční hodnota peněz I_0,
- x ... konečná hodnota peněz I,
- 1,03 ... $1+0,03=1+\frac{3}{100}=1+\frac{p}{100}$ (jednička zvětšená o výši inflace ve zlomku).

$\Rightarrow$ hodnotu peněz sníženou o inflaci během jednoho roku můžeme rovnou počítat pomocí vzorce $I=\frac{I_0}{1+\frac{p}{100}}$.

Př. 12: Urči hodnotu 100 000 Kč po deseti letech, pokud se bude průměrná hodnota inflace v tomto období rovnat 3%.

Nejdříve určíme kolik peněz bude nutné po dvaceti letech na nákup zboží v hodnotě 100000 v současnosti. Poté přepočítáme hodnotu neúročených 100000.
Kolik peněz potřebujeme na nákup zboží, které mělo na začátku cenu 100000.

po 1. roce ……. $10^5 \cdot 1,03$

po 2. letech ……. $\left(10^5 \cdot 1,03\right)1,03 = 10^5 \cdot 1,03^2$ (na počátku roku by bylo potřeba $10^5 \cdot 1,03$ Kč)

po 3. letech ……. $10^5 \cdot 1,03^3$

po x. letech ……. $10^5 \cdot 1,03^x$

teď můžeme dosadit 10 let a určit množství peněz v hodnotě 100000

po 10. letech ……. $10^5 \cdot 1,03^{10} = 134392$ Kč

Po deseti letech potřebujeme 134392 Kč na nákup zboží, které před tím stálo 100000 Kč.
Hodnotu 100000 spočteme přímou úměrností:

134392 Kč … 100 000 Kč
100 000 Kč … x Kč

$$\frac{x}{100000} = \frac{100000}{134392} \Rightarrow x = 100000 \cdot \frac{100000}{134392} = 74409 \text{ Kč}$$

Při tříprocentní inflaci bude mít 100000 Kč stejnou hodnotu, jakou má v dnešní době 74409 Kč (peníze tak ztratí přes 25% své hodnoty).

Shrnutí: