

#### 4.4.4 Jak se popisují vlnočástice

**Předpoklady:** 040403

Závěr dvojštěrbinového pokusu s elektronem: Nelze sestavit takové zařízení, abychom dokázali určit, kterým otvorem elektron proletěl a zároveň se neporušil interferenční obraz.

Co se tedy děje s elektronem při průchodu dvojštěrbinou? Prochází elektron buď otvorem 1 nebo otvorem 2?

Musíme uvažovat zvláště:

- Jestliže existuje zařízení, které umožňuje určit, zda elektron prošel otvorem 1 nebo otvorem 2, můžeme říci, že elektrony procházejí buď otvorem 1 nebo otvorem 2 (a neměříme interferenci).
- Jestliže nemáme zařízení, které umožňuje určit, zda elektron prošel otvorem 1 nebo otvorem 2, nemůžeme říci, že elektrony procházejí buď otvorem 1 nebo otvorem 2 (a naměříme interferenci).

Jde o důsledek jednoho z nejzákladnějších principů přírody – principu neurčitosti.

**(Heisenbergův) princip neurčitosti**

**Nepřesnost, se kterou můžeme najednou určit hodnoty některých dvojic veličin, není možné libovolně zmenšovat. Například nemůžeme najednou určit rychlost a polohu částice s libovolnou přesností.**

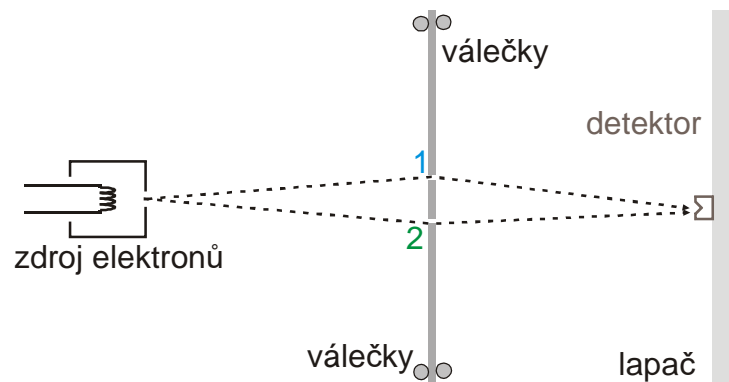
Co princip neurčitosti znamená?

Čím přesněji známe polohu částice, tím méně můžeme vědět o její rychlosti.

Prakticky:

- Chytíme elektron do dlaní. Tím jsme omezili jeho možnou polohu  $\Rightarrow$  elektron se nám v dlaních začne škubat (aby neurčitost jeho rychlosti byla dostatečná pro splnění relace neurčitosti).
- Začneme dlaně svírat  $\Rightarrow$  prostor pro elektron se zmenšuje  $\Rightarrow$  zmenšuje se neurčitost jeho polohy  $\Rightarrow$  musí se zvětšovat neurčitost jeho rychlosti  $\Rightarrow$  elektron se více škube.
- Čím více elektron v dlaních svíráme (a čím méně má místa), s tím větší kinetickou energií nám v dlaních létá.

Jak princip neurčitosti chrání interferenční tajemství elektronů je vidět v následujícím pokusu. Umístíme desku s dvojštěrbinou na velice jemné válečky, ve kterých se může pohybovat ve svislém směru.



- Pokud elektron projde do detektoru otvorem 1, musí se od dvojštěrbiny odrazit směrem dolů  $\Rightarrow$  odstrčí dvojštěrbinu směrem nahoru  $\Rightarrow$  po zachycení elektronu v detektoru zjistíme, že se dvojštěrbina pohybuje směrem nahoru.
- Pokud elektron projde do detektoru otvorem 2, musí se od dvojštěrbiny odrazit směrem nahoru  $\Rightarrow$  odstrčí dvojštěrbinu směrem dolů  $\Rightarrow$  po zachycení elektronu v detektoru zjistíme, že se dvojštěrbina pohybuje směrem dolů.

Pro libovolnou polohu detektoru můžeme ze změny pohybu stěny s dvojštěrbinou poznat, kterým otvorem elektron proletěl (aniž bychom na něj jakkoliv působili).

Pokud chceme vystopovat průchod elektronu přes dvojštěrbinu, musíme znát s obrovskou přesností najednou:

- polohu stěny (abychom věděli, jakým směrem se elektron musí od stěny vydat k detektoru)
- rychlost stěny (abychom dokázali zaregistrovat malou změnu rychlosti stěny způsobenou odrazem elektronu od otvoru).

Přesnost, se kterou můžeme najednou tyto veličiny naměřit je omezena principem neurčitosti a zřejmě je menší než bychom potřebovali pro vystopování elektronu (buď nebudeme dost přesně vědět, jak byly umístěny otvory, nebo jak se změnila rychlost stěny).

Jak velká je neurčitost?

Závisí na hmotnosti částice (lehčí částice mají součin neurčitosti polohy a rychlosti větší).

Neurčitost rychlosti, pokud neurčitost polohy je  $3,3 \cdot 10^{-10}$  m (průměr atomu):

- elektron ( $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$  kg):  $175000$  m/s = 175 km/s (během sekundy se může přemístit z Budějovic do Salzburgu, Mladé Boleslavi nebo Vídně),
- kulka ( $m = 0,003$  kg):  $5,32 \cdot 10^{-23}$  m/s (posunutí o poloměr atomu by trvalo 200 000 let).

**Př. 1:** Jedním z největších problémů klasické fyziky bylo vysvětlení stability atomů (proč se elektrony nezhroutí do jádra). V Bohrově modelu atomu byla stabilita zaručena tím, že elektrony mohou existovat pouze v určitých stavech. Jejich stanovení bylo však značně účelové. Daleko principiálnější příčinou stability atomů je existence relací neurčitosti. Zkus kvalitativně vysvětlit, proč se kvůli relaci neurčitosti pro polohu a rychlost elektron nezhroutí do jádra.

Kdyby elektron kroužil po spirále do jádra, zmenšovala by se neurčitost jeho polohy  $\Rightarrow$  musela by se zvětšovat neurčitost v jeho hybnosti  $\Rightarrow$  rostla by jeho kinetická energie (rychlost pohybu).

Elektron se snaží zaujmout stav, ve kterém má minimální energii. S přibližováním klesá potenciální energie a roste kinetická energie  $\Rightarrow$  pokud je pokles potenciální energie pomalejší než nárůst kinetické energie, elektron se nepřibližuje blíže k jádru a zaujme takovou pozici, aby jeho energie byla minimální (pokles potenciální energie při dalším přiblížení jádru by byl menší než nárůst kinetické energie kvůli zvyšování neurčitosti hybnosti).

Jak popisujeme a předpovídáme pohyb v klasické fyzice:

- poloha (kde těleso je),
- rychlost (jak se poloha mění),
- působící síly (mění rychlost).

Pokud známe uvedené tři skupiny údajů dokážeme předpovědět, jak se bude těleso pohybovat v budoucnosti.

Na něco podobného nemůžeme u mikročástic ani pomyslet (poloha s rychlostí nejdou přesně ani změřit natož předpovídat).

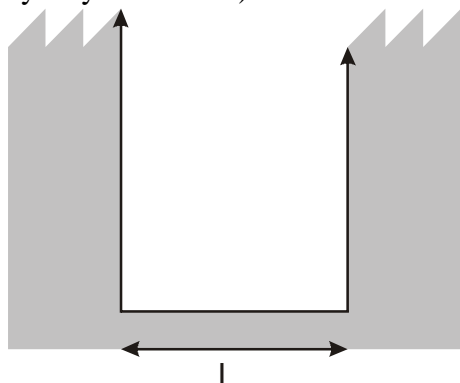
**Důsledek principu neurčitosti: V kvantové mechanice nemůžeme předpovídat přesný pohyb konkrétní částice, ale pouze pravděpodobnosti, kde částici najdeme (což znamená, že o chování konkrétních částic nedokážeme říci mnoho, zatímco chování velkého množství částic popisujeme docela přesně).**

⇒ Kvantová mechanika rezignuje na určování jistého stavu, zabývá se určováním pravděpodobností:

- můžeme předpovědět s jakou pravděpodobností elektron dopadne do určitého místa (jak bude vypadat interferenční obrazec, kde se dopady elektronů více vyvolá fotografický papír, kam umístit detektor, aby do něj dopadalo hodně elektronů),
- nemůžeme (ani teoreticky) předpovědět, kam dopadne konkrétní elektron.

Stav částice nepopisuje soubor hodnot pro polohu, rychlost, ..., ale vlnová funkce (něco jako kvadratická funkce, ze které získáváme čísla, která charakterizují stav částice (například s jakou pravděpodobností se v nějakém okamžiku nachází v nějakém místě, jakou má energii, ...)).

Konkrétní řešení jednoduchého příkladu: Nekonečná hluboká jednorozměrná potenciálová jáma o o šířce  $L$  (jednorozměrná propast nebo studna s vodorovným dnem a s nekonečně vysokými stěnami).



Kde se může nacházet klasická částice? Jakou bude mít nejnižší možnou energii?

Klasická částice může se stejnou pravděpodobností stát kdekoli na dně jámy. Pokud bude hladina nulové potenciální energie na dně jámy, bude její nejnižší možná celková energie nulová.

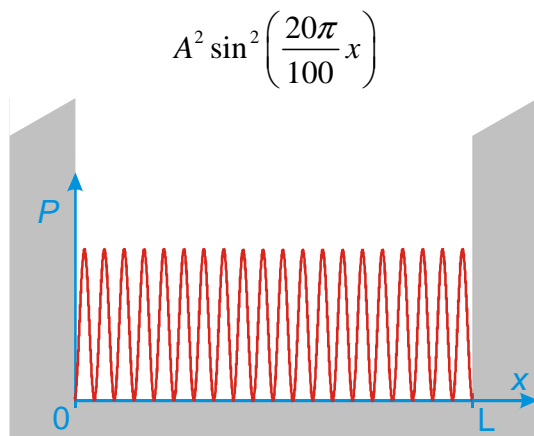
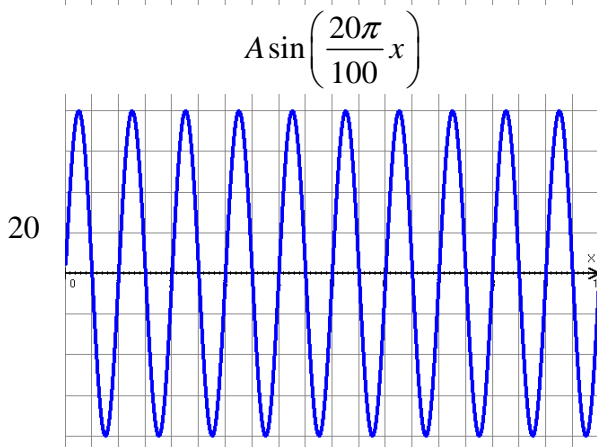
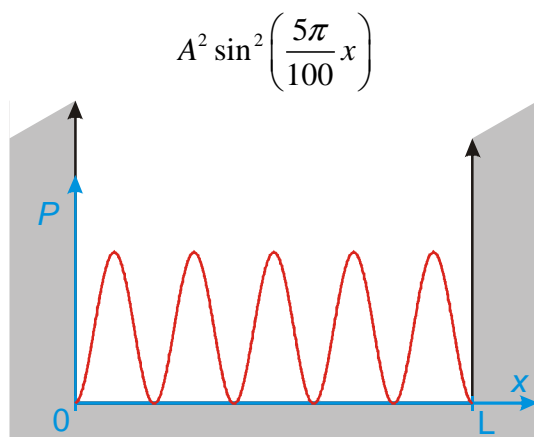
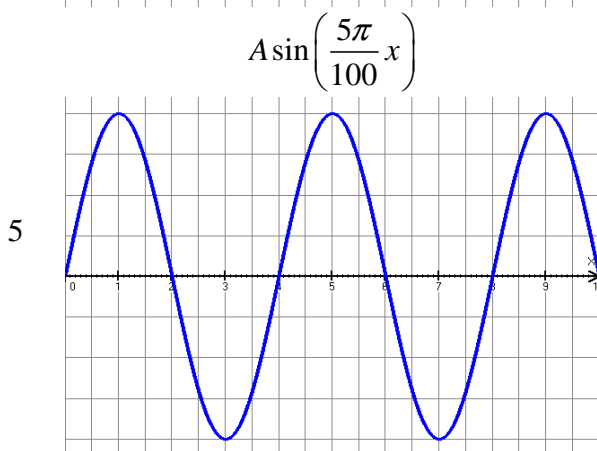
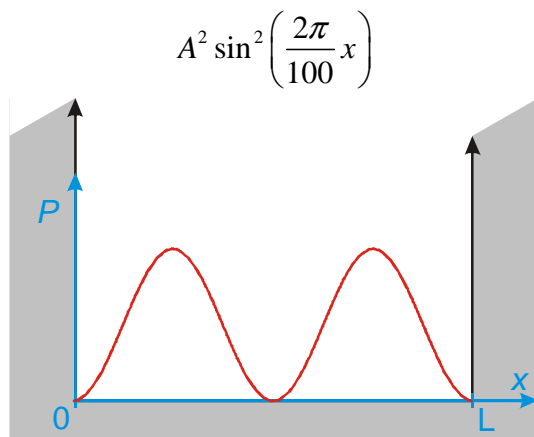
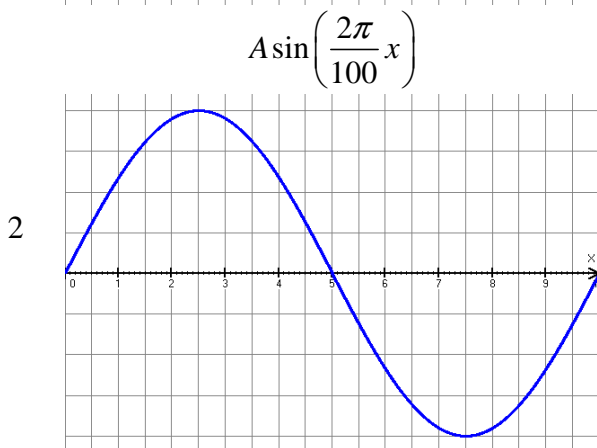
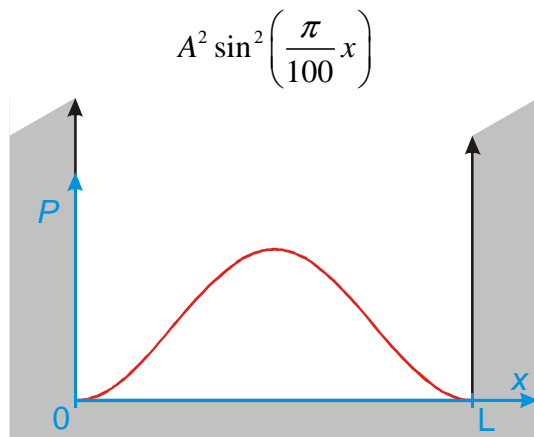
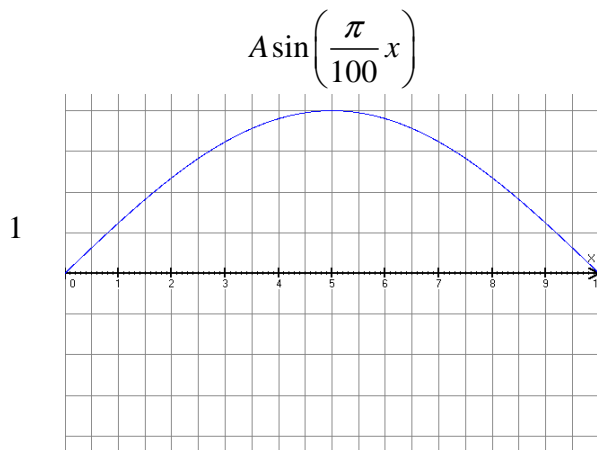
Stav elektronu je popsán vlnovou funkcí, do které můžeme dosazovat přirozené číslo  $n$  ⇒ elektron se může uvnitř jámy nacházet v několika různých stavech podle toho, jaké číslo dosadíme.

**$n$  - kvantové číslo**, rozlišuje různé stavy, ve kterých se může elektron nacházet (kvantové číslo již známe z Bohrova modelu atomu).

Ve složitějších situacích jsou stavy částic popsány složitějšími funkcemi s větším počtem kvantových čísel.

Některé vlnové funkce elektronu v nekonečně hluboké potenciálové jámě.

$n$	Vlnová funkce $\psi_n(x)$	Rozložení pravděpodobností $ \psi(x) ^2$
-----	---------------------------	--



⋮

V levém sloupci vidíme, že jednotlivé vlnové funkce jsou shodné s rovnicemi, které popisují stojaté vlnění struny s oběma pevnými konci.

V pravém sloupci vidíme, že rozložení pravděpodobnosti se s rostoucí hodnotou kvantového čísla stává rovnoměrnějším.  $\Rightarrow$  Se zvětšujícími se hodnotami kvantových čísel se výsledky kvantové mechaniky blíží výsledkům klasické mechaniky.

Vlnová funkce popisuje stav částice  $\Rightarrow$  musí popisovat i hodnoty veličin (například energie). Jak tyto hodnoty z funkce získáme?

Každá veličina má operátor (příkladem operátoru je například umocnění na druhou, odmocnění, vynásobení číslem, ...), jehož uplatněním na funkci získáme hodnoty veličiny.

Každé hodnotě kvantového čísla  $n$  odpovídá jiná hodnota energie  $E_n = \frac{h^2 n^2}{8mL^2}$ .

**Př. 2:** Vysvětli pomocí principu neurčitosti.

a) Proč nemůže být nejnižší energie elektronu nulová?

b) Proč musí být ve vztahu pro energii stavu šířka potenciálové jámy ve jmenovateli?

a) Proč nemůže být nejnižší energie elektronu nulová?

Nulová energie elektronu  $\Rightarrow$  nulová kinetická energie  $\Rightarrow$  nulová rychlost  $\Rightarrow$  nulová neurčitost v určení rychlosti. Podle relace neurčitosti však neurčitost rychlosti nikdy nulová být nemůže.

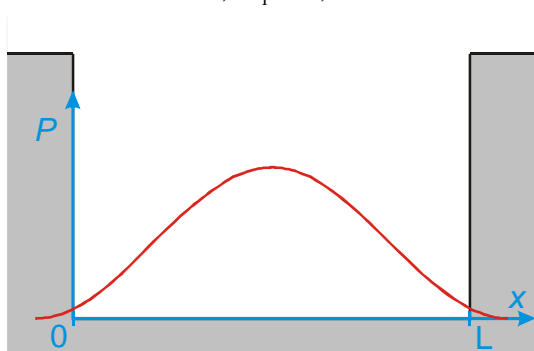
b) Proč musí být ve vztahu pro energii stavu šířka potenciálové jámy ve jmenovateli?

Šířka potenciálové jámy nám udává neurčitost polohy elektronu  $\Rightarrow$  snižováním šířky jámy snižujeme neurčitost polohy  $\Rightarrow$  musí se zvětšovat neurčitost rychlosti a tedy i kinetická energie elektronu.

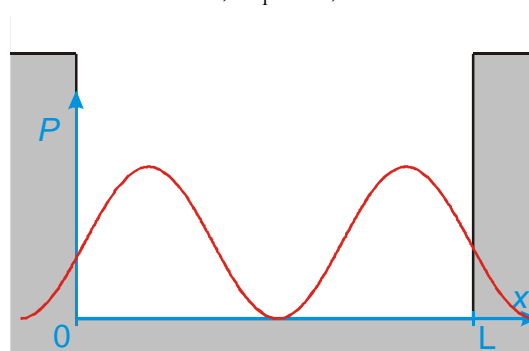
### Potenciálová jáma konečné hloubky

Nekonečná potenciálová jáma je nejjednodušší, ale příliš idealizovaný příklad. Co se stane, když jáma nebude nekonečně hluboká?

$$n = 1, E_1 = 2,9 \text{ eV}$$



$$n = 2, E_1 = 11,6 \text{ eV}$$



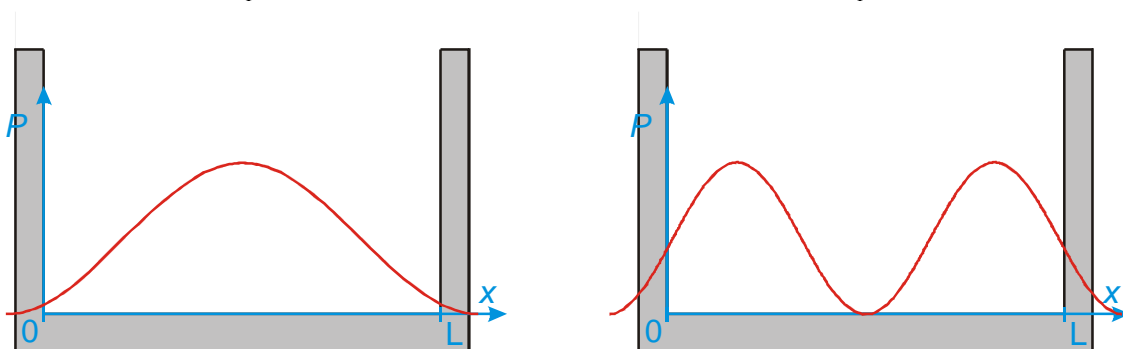
Zásadní odlišnost od klasické fyziky: Elektron se s nenulovou pravděpodobností může nacházet i v místech, kde je bariéra („prosakuje“ do ní).

**Dodatek:** eV je zkratkou elektronvoltage – jednotky energie používané pro popis mikrosvětla.

Zajímavý důsledek r v případě, že elektron se nenachází uvnitř potenciálové jámy, ale pouze uvnitř pasti, jejíž stěny mají konečnou výšku a konečnou tloušťku.

$$n = 1, E_1 = 2,9 \text{ eV}$$

$$n = 2, E_1 = 11,6 \text{ eV}$$



Ačkoliv elektron nemá dostatečnou energii, aby se dostal z pasti ven, můžeme ho najít i mimo past (na obrázku je nenulová pravděpodobnost nalezení elektronů i mimo past).

Jev, kdy **částice překoná bariéru, ačkoliv k jejímu překonání nemá dost energie**, nazýváme **tunelování** (tunelový jev). Tunelování je příčinou mnoha fyzikálních jevů například radioaktivních rozpadů, využívá se například u tunelovacích mikroskopů nebo tunelových diod.

Obrázky naznačují, že pravděpodobnost tunelování rychle klesá s výškou a tloušťkou stěny.

**Dodatek:** Pro představu hodnota pravděpodobnosti protunelování částice  $\alpha$  z jádra uranu je řádově  $10^{-38}$ , proto částici  $\alpha$ , která je v jádře uvězněna, trvá i při  $10^{22}$  pokusech za sekundu průměrně miliardy let, než se jí podaří z jádra uniknout (poločas rozpadu uranu je 4,5 miliardy let).

**Princip nerozlišitelnosti částic: Všechny mikročástice stejného typu jsou naprosto stejné, není možné je očíslovat, odlišit, identifikovat od sebe.**

⇒ Kvantová čísla nerozlišují elektrony mezi sebou, ale možné stavy elektronů od sebe (podobně jako číslo autobusu městské hromadné dopravy neoznačuje konkrétní autobus, ale trasu, po které může vyjet jakýkoliv autobus).

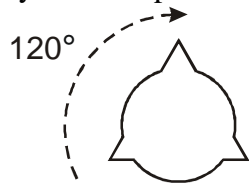
Další podivnosti:

- **Antičástce:** Ke všem částicím existují částice se stejnými vlastnostmi, ale opačným nábojem (pozitron, antiproton, antineutron, antineutrino), některé částice jsou totožné se svou antičásticí (skutečně neutrální částice - foton).
- **Spin (s):** Další charakteristika, kterou je nutné připsat každé částici. Možné hodnoty jsou násobky jedné poloviny.

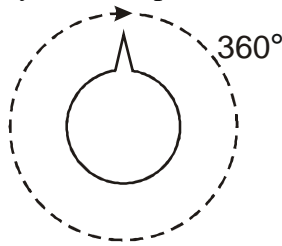
Spin částice bývá vysvětlován jako vlastní moment hybnosti, který vzniká rotací částice kolem své osy. Tato analogie má značné trhliny, protože:

- Spin popisuje, jak se chová vlnová funkce, při „obcházení“ částice kolem dokola:

- $s = 3$ : při otočení o  $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$  získáváme stejnou hodnotu (částice je symetrická při otočení o  $120^\circ$ ),



- $s = 1$ : při otočení o  $\frac{360^\circ}{1} = 360^\circ$  získáváme stejnou hodnotu (částice je symetrická při otočení o  $360^\circ$ ),



- $s = \frac{1}{2}$ : při otočení o  $\frac{360^\circ}{\frac{1}{2}} = 720^\circ$  získáváme stejnou hodnotu (částice je symetrická teprve při otočení o  $720^\circ$ , tedy až když ji obejdeme dokola dvakrát).  
(zde obrázek chybí, těžko říct, jak jej nakreslit).

Dva druhy vlnových funkcí:

- symetrické: při otočení o  $360^\circ$  získáme stejnou hodnotu,
- antisymetrické: při otočení o  $360^\circ$  získáme opačnou hodnotu, stejnou až při otočení o  $720^\circ$

⇒ Dva druhy částic:

**bosony:**

- symetrická vlnová funkce, celočíselný spin,
- částice zprostředkující fyzikální síly (foton, gluon, ...)
- více bosonů se může nacházet ve stejném kvantovém stavu (dokonce čím více bosonů se v takovém stavu nachází, tím větší je pravděpodobnost, že do takového stavu přejde další boson)

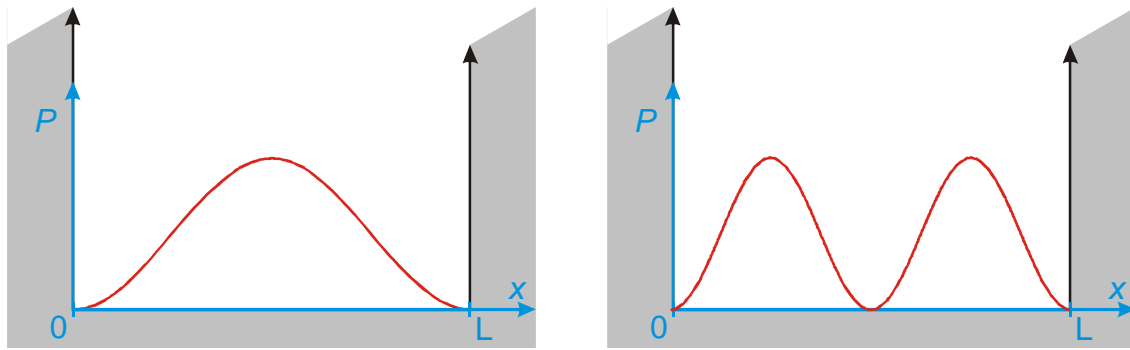
**fermiony:**

- antisymetrická vlnová funkce, poločíselný spin,
- běžné "stavební" částice, elektron, proton, neutron, ...
- **Pauliho vylučovací princip: Nemohou existovat dva fermiony ve stejném kvantovém stavu (stavu popsaném stejnými hodnotami kvantových čísel).**

Důsledek: Dva elektrony v jedné potenciálové jámě ⇒ každý musí být popsán jinou vlnovou funkcí, aby nebyly ve stejném stavu

$$A^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{100}x\right)$$

$$A^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{100}x\right)$$



Naopak héliová jádra, se chovají jako bosony a proto budou mít vlnové funkce v základní stavu stejné  $A^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{100}x\right)$ .

Jak popisují vlnové funkce průchod přes štěrbinu?

- Otevřena pouze první štěrbina  $\Rightarrow$  elektron je popsán funkcí  $\psi_1(x)$ .
- Otevřena pouze druhá štěrbina  $\Rightarrow$  elektron je popsán funkcí  $\psi_2(x)$ .
- Otevřeny obě štěrbin, nesledujeme, kudy elektron prochází  $\Rightarrow$  elektron je popsán funkcí  $\psi_1(x) + \psi_2(x)$ . Pravděpodobnost, že nalezneme elektron v určitém místě, odpovídá hodnotě  $\psi_1(x) + \psi_2(x)$ , která může být nulová (pokud se hodnoty obou funkcí v daném místě odčítají (interferenční minimum) i dvojnásobná než hodnoty funkcí  $\psi_1(x)$  a  $\psi_2(x)$  (pokud mají obě funkce stejné znaménko a jejich hodnoty se sčítají (interferenční maximum).
- Otevřeny obě štěrbin, sledujeme, kudy elektron prochází  $\Rightarrow$  elektron:
  - prochází otvorem 1  $\Rightarrow$  je popsán funkcí  $\psi_1(x)$ ,
  - prochází otvorem 2  $\Rightarrow$  je popsán funkcí  $\psi_2(x)$ ,
  - pravděpodobnost, že nalezneme elektron v určitém místě je součet určených pravděpodobností (tedy nezáporných čísel)  $\Rightarrow$  nemůže se objevit interference.

Kvantová mechanika dosáhla nesporných úspěchů, skvěle souhlasí s experimenty, umožnila mnohé technické vynálezy:

- jaderná energetika,
- polovodiče (a tedy vlastně veškerá moderní elektronika včetně počítačů),
- lasery,
- ...

Přesto v její interpretaci přetrvávají od dvacátých let minulého století zásadní problémy, kvůli kterým uvedenou statistickou interpretaci nikdy nepřijala celá řada zakladatelů: Einstein, Schrödinger, De Broglie ....

Problém: Pohyb elektronu za dvojjštěrbinou je popsán vlnovou funkcí, která dává nenulové pravděpodobnosti obrovskému množství poloh (tam všude se elektron může nacházet). Jakmile elektron změříme (dopadne na detektor) téměř všechny možnosti polohy elektronu zmizí a elektron se objeví na jednom místě. Změřením polohy došlo k **redukci (kolapsu) vlnové funkce**.



Jednodušší případ. Jádra radioaktivního prvku se samovolně rozpadají (například tak, že vyšlou částici  $\alpha$ ), po uplynutí charakteristického časového intervalu (poločasu rozpadu) se rozpadne polovina takových jader  $\Rightarrow$  jádra jsou popsána vlnovou funkcí  $\psi = \psi_1 + \psi_2$ , kde

- $\psi_1$  - stav jádro je celé, částice nevyletěla,
- $\psi_2$  - stav jádro je rozpadlé, částice vyletěla.

Provádíme pokus s jediným jádrem. Dokud se na jádro nedíváme, můžeme tvrdit, že je ho stav je popsán funkcí  $\psi = \psi_1 + \psi_2$ . Jakmile však změříme jeho stav, zjistíme, že se nenachází v složení stavů  $\psi = \psi_1 + \psi_2$ , ale je buď rozpadlé ( $\psi_1$ ) nebo nerozpadlé ( $\psi_2$ ). Funkce  $\psi = \psi_1 + \psi_2$  zkolabovala buď na stav  $\psi_1$  nebo  $\psi_2$ .

Zvýraznění problému (**paradox Schrödingerovy kočky**):

Jádro umístíme pod skleněný poklop spolu s kočkou, detektorem částic  $\alpha$ , ampulkou jedovatého plynu a zařízením, které ampulku rozbije, když detektor zachytí částici  $\alpha$  (a tak jedovatým plynem otráví kočku). Nový obsah obou stavů:

- $\psi_1$  - je stav jádro je celé, částice nevyletěla, kočka žije,
- $\psi_2$  - je stav jádro je rozpadlé, částice vyletěla, kočka je mrtvá.

Podle kvantové mechaniky je stav pod poklopem dán složením stavů  $\psi = \psi_1 + \psi_2$  (tedy kočka je živá i mrtvá zároveň). To však není pravda, jakmile se podíváme, vidíme, že kočka je buď živá (a jádro nerozpadlé) nebo mrtvá (a jádro rozpadlé). Můžeme však tvrdit, že to tak bylo i předtím, než jsme se na kočku podívali?

Dodnes neexistuje přesvědčivé konkrétní vysvětlení těchto skutečností, které by bylo logicky konzistentní a ve shodě s experimentem. Máme jen vágní a neurčité formulace. Co je v kvantové fyzice vlastně reálné?

### **Hypotéza skrytých parametrů**

Vlnová funkce neobsahuje všechny informace o stavu částice, kromě ní existují další „skryté parametry“, které definitivně určují výsledky případného měření (například přesnou polohu).

1964 J.S. Bell: Hypotéza skrytých parametrů vede u některých pokusů k měřitelnému rozporu s předpověďmi statistické interpretace (Bellova nerovnost)  $\Rightarrow$  provedení pokusů  $\Rightarrow$  výsledky popírají hypotézu skrytých parametrů  $\Rightarrow$  o výsledcích měření není rozhodnuto dokud měření nezačne.

**Měřením nezjistíme předem určené hodnoty, měřením (interakcí měřícího zařízení a částice) výsledky měření teprve vznikají.**

Jak celá situace vypadá v analogii?

### **Jablečná analogie**

Maminka připravuje svým dětem svačinu. Rozřízne kvantové jablko tak, aby vznikly dvě nestejně poloviny (krájí stejným způsobem, jakým se jablko rozkrájí o vánocích). Kvůli zákonu zachování stopky a bubáka získá dvě poloviny (se stopkou  $\psi_S$ , s bubákem  $\psi_B$ ). Obě poloviny uloží do stejných neprůhledných svačिनovníků. Jeden si vezme Maruška, která jde do školy v Třeboni, druhý svačिनovník si dá do tašky Jozífek, který jede na exkurzi do Prahy. Dokud se ani jeden z nich nepodívá do svého svačिनovníku, stav jablka v obou svačिनovnících je popsán vlnovou funkcí  $\psi = \psi_S + \psi_B$ .

Díky pokusům s Bellovými nerovnostmi víme, že ve skutečnosti není v jednom svačिनovníku jedna polovina jablka a v druhém druhá (to by už bylo rozhodnuto předem podle hypotézy

skrytých parametrů, která je experimentálně vyloučena), ale obě poloviny jsou zatím v obou svačिनovnicích najednou.

Je čas přesnídávky. Jozífek otevírá a vyndává ze svačिनovníku polovinu jablka se stopkou.

Vlnová funkce  $\psi = \psi_S + \psi_B$  v jeho svačिनovníku kolabuje na jediný stav  $\psi_S$ . V tom samém okamžiku kolabuje vlnová funkce i ve svačिनovníku jeho sestry a přestože ještě před okamžikem byla pravděpodobnost, že vyndá polovinu jablka s bubákem pouze 50 %, nyní si může být jistá, že její polovina bude mít bubáka.

Jak se její polovina jablka na vzdálenost více než 100 km dozvěděla, že má mít bubáka a ne stopku, není jasné.

Největší mozky světové fyziky jsou ve stejné situaci jako špatní studenti střední školy: Ví, jaká čísla dosazovat do jakých rovnic, ale vůbec netuší, proč to právě tímto způsobem vychází.

Něco je špatně:

- Ještě se nepodařilo naměřit dostatek experimentů, které by odhalily pravou příčinu zatím záhadných jevů?
- Nikdo nepřišel na tu základní jednoduchou sjednocující myšlenku jakou je princip relativity v STR (princip ekvivalence v OTR)?
- Matematická logika se nehodí k popisu přírody?
- Prostor a čas fungují ještě úplně jinak, než si myslíme?

Každopádně, zde je ještě možnost se opravdu zapsat do dějin.

---

**Shrnutí:**